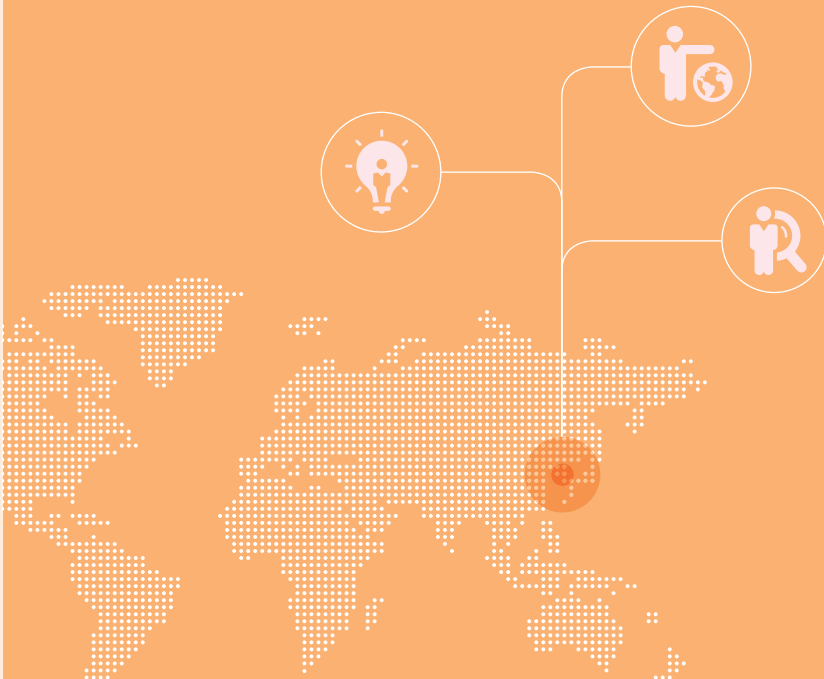


덴마크 MAKRO 재정전망 모형

2022. 12.



| 연구진 |

연구책임: 고창수 재정전망팀장

공동연구원: 권미연 선임연구원

백가영 선임연구원

정상기 연구원

이정윤 위촉연구원

이 보고서는 덴마크 DREAM에서 2021년 12월 영문으로 발행한 *MAKRO Model Documentation* 을 한국조세재정연구원 조세재정전망센터가 한국어로 번역한 것으로 모든 저작권은 덴마크 DREAM에 있습니다. 보고서 내용에 대한 정확한 이해를 위해 필요시 아래의 원문 링크를 참고 하시기 바랍니다.

Originally published by the DREAM group in English under the title:
DREAM, MAKRO Model Documentation, 2021,
https://dreamgroup.dk/media/12327/makro_model_documentation_dec2021.pdf

차례

I. 서론	1
1. 모형의 개요	1
2. 보고서 개요(This Documentation)	3
3. 모형 코딩 설정(Computational MAKRO)	8
가. 표기법	8
나. 코드 구성	9
II. 모형 설명	10
1. 가계(Households)	10
가. 기본 정의	10
나. 최적화(Optimization)	13
다. 아동(Children)	17
라. 주택 객체 f 설명	18
마. 유산(Bequests)	21
바. 1계 조건의 병합	23
사. 가계 소득	24
아. 연금	27
자. 가계의 금융 포트폴리오	31
차. 소비 구성 요소	37
카. 부록	47
2. 기업	66
가. 비용 최소화	67
나. 동태적 최적화	70
다. 금융 객체로서의 기업	73
라. 에너지 추출 부문	80
마. 주거 부문	80
바. 부록	82
사. 코드 내 수식	92
아. 내생적 운영잉여	99
자. 고비용 외부금융을 통한 기업 투자	100

3. 가격 설정 행동	103
가. 독점경쟁과 가격경직성	104
나. 독점경쟁모형	105
다. 결과	107
4. 노동시장	108
가. 가계	109
나. 기업	117
다. 매칭 마찰(Matching friction)	122
라. 총량에 대한 대수적 표현	123
마. 임금 결정	125
5. 수출	128
가. 국내 생산재 수출	129
나. 수출용 수입(재수출)	134
다. 동태적 가격비율 도출	135
6. 정부	138
가. 수입	139
나. 지출	148
다. 순 이자소득	151
라. 구조적 객체(Structural objects)	153
7. 공공 생산(Public Production)	154
가. 공급 측면	154
나. 투자와 중간재의 구성 및 결정	158
다. 수요 측면	160
8. 구조적 고용과 구조적 총 부가가치	161
가. 구조적 고용	162
나. 구조적 총 부가가치(GVA)	164
9. 투입산출 체계	164
가. 시장 청산 가격	166
나. 수요 나무(Demand trees)	166
다. 총량(Aggregates)	169

라. 투자	170
마. 데이터와 캘리브레이션	173
바. 가중치 모수의 조정(Balancing share parameters)	175
참고문헌	177

표 목차

〈표 II-1〉 상위 나무 탄력성(η)과 예산 비율	41
〈표 II-2〉 하위 나무 레벨 1. 레온티에프 계수 μ^{low}	44
〈표 II-3〉 하위 나무 레벨 2. 탄력성 η 및 외국 비율 S_f	46
〈표 II-4〉 가격 및 마크업 변수의 코드명	108
〈표 II-5〉 노동시장 변수의 코드명: 가계	116
〈표 II-6〉 노동시장 변수의 코드명: 이주근로자	117
〈표 II-7〉 노동시장 변수의 코드명: 기업	128
〈표 II-8〉 GDP 대비 품목별 국내 생산품의 총수출 변화	137
〈표 II-9〉 GDP 대비 수입품 수출의 변화	137
〈표 II-10〉 수출용 수입품의 상대적 가치	138
〈표 II-11〉 세율의 부호 표기(Government Revenues: Tax Rates)	147
〈표 II-12〉 투입산출행렬(2개 부문 예시)	165

그림 목차

[그림 II-1] 상위 나무(Upper tree)	38
[그림 II-2] 하위 나무(Lower tree)	38
[그림 II-3] 소비 및 유산 효용의 시퀀스 구조	51
[그림 II-4] CES 나무의 구조	68

I. 서론

- (소개) 본고는 덴마크 DREAM에서 개발한 MAKRO 모형 보고서 *MAKRO Model Documentation*에 서술된 모형 전반에 대한 설명을 번역 및 요약함¹⁾
 - MAKRO는 덴마크의 중장기 경제 전망 및 정책 개입 시 거시경제에 미치는 영향을 평가하는 목적으로 개발된 모형임
 - GDP, 대외 무역, 소비, 공공 지출 및 세금 수입 등 경제 변수의 예측치를 제공하며, 정부의 정책 효과를 구조적·경기적 수준에서 모두 평가하는 것이 가능함
 - MAKRO의 주안점은 재정으로, 구조적 재정수지와 재정 지속가능성에 대한 요소들을 포함하고 있음
 - 덴마크 재무부(Ministry of Finance of Denmark)의 실증적 모델링 기술을 강화하기 위해 2017년부터 개발해 2021년 본 보고서를 통해 베타 버전이 공개되었고, 재무부에서 사용할 수 있도록 지속적으로 업데이트 중임

1. 모형의 개요

- (모형의 정의) MAKRO는 덴마크 경제를 중장기적으로 전망하는 대규모 거시경제 모형
- (모형 내 주체) 경제에는 가계, 기업, 정부, 덴마크 수출 관련 외국까지 총 4가지 경제 주체가 있으며 이들은 노동시장, 자본시장 및 생산물시장에서 상호 작용함
 - 모형이 수행하는 핵심적 작업은 시장의 작동 방식을 모델링하는 것
 - 가계와 기업의 행동은 대부분의 현대 거시경제 모형에서와 같이 미래지향적이며 최적화 경제 활동을 한다고 가정
 - 가계와 기업의 결정은 각 주체의 목적함수, 선호, 기술 및 예산제약 등 세부 사항에 따라 이루어짐

1) 보다 자세한 내용은 <https://dreamgroup.dk/makro/introduction/>을 참고(업데이트 확인일자: 2022. 7. 8.)

- 정부의 행동은 일련의 외생적 규칙을 따름
- 수출은 다양한 무역 모델을 통합하는 수요함수에 의해 결정됨
- 경제 내 장·단기 행태의 차이는 시장에 영향을 미치는 기업의 가격 결정 행동과 임금 협상 과정의 시차적 속성 같은 마찰(nature of frictions)에서 비롯됨
- (모형 작동 방식) 모형은 충격 발생 또는 정책 개입 이후 단기적 마찰이 사라지면 주기적인 정상화 기간을 거쳐 수렴함
 - 수렴 경로와 모형이 일시적 충격과 영구적 충격에 반응하는 방식은 최적 의사결정의 미래지향적 특성에 의해 결정됨
 - 수렴은 이론적으로 정의되며 인구통계학적, 교육적, 사회경제적 조건에 따라 경험적으로 결정되는 장기적인 경로로 발생
 - 이 경로를 따라 단기적 마찰에 영향받지 않을 때의 덴마크 경제 모형을 전망하며, 이는 정책 평가의 베이스라인이 됨
 - 인구통계학적 요인 및 기타 외생적 요인이 지속적으로 변동함에 따라, 모형은 초기에는 물론 장기적으로도 안정된 상태는 아니지만 결국 움직이는 장기적 해(moving long run solution)로 수렴함
- (DSGE 모형과의 차이) MAKRO는 결정론적 완전예측모형(deterministic perfect foresight model)이라는 점에서 DSGE 모형과 다름
 - DSGE 모형은 상태 변수의 함수이며 모델의 확률적 특성과 관련된 정보를 포함하는 최적의 결정을 도출함
 - 이러한 최적의 의사결정 함수는 모델의 균제상태(steady state) 부근에서 정의됨
 - MAKRO는 모든 변수에 대해 단일 경로로 해를 도출하는 연산가능일반균형모형(Computational General Equilibrium model)임
 - 도출된 해는 일련의 초기 및 최종 조건에 의존하며 연구하고자 하는 모든 정책 변화와 외생적 요인의 변동 사항을 반영함
- (모형의 특징) MAKRO는 다른 유형의 모형과 달리 규모가 큼
 - 가계 측면에서는 85년 생애주기의 중첩세대에 대해 각각 해를 도출, 기업 측면에서는 현재 경제 내의 9개 부문에 대해 해를 도출

- 다수의 내생 변수를 포함하는 비선형 모델이며, 전문적인 계획 및 예산 책정 도구로서 모델의 해당 변수는 실제 데이터 값과 정확히 일치해야 함
- 모형에는 계량경제학적 방법으로 추정하거나, 데이터에서 보정하거나, 기존 문헌에서 가져온 많은 모수 집합이 존재
 - 많은 수의 모수를 캘리브레이션하고 추정하는 과정에서 주로 덴마크 등록 데이터 (Denmark's register data)에서 얻은 대량의 데이터를 활용함
 - 모든 데이터 중에서 인구는 모델의 주요한 외생 데이터(main exogenous input) 이므로 가장 중요한 역할을 함
- (모형의 목적) MAKRO의 주요 목적 중 하나는 정부 재정수지(budget balance)와 함께 경제 충격 및 정책 변화에 따른 거시경제 변화를 살펴보는 것
 - 특정 공공 소비의 변화뿐만 아니라 다양한 조세, 이전지출 등 정책 변화의 효과를 평가할 수 있어야 하기 때문에 모형 내 재정 부분을 상당히 세분화해야 함
 - 세분화된 정보는 소득세 수입을 산출하는 데 필요한 가계 소비, 저축 및 고용 등 생애 주기(life cycle) 정보에 반영됨
 - 생산의 부문별 세분화, 각 부문 내 투입물의 선택, 그리고 경제의 투입산출 구조에 기술된 부문 간 상호작용에도 반영되어 부가가치세와 법인세를 결정
 - 모든 세부 정보와 함께 충격 및 정책 변화에 대한 각 경제 주체들의 반응을 반영하여, 총체적 효과와 재정적 영향에 대해 보다 상세히 모델링하는 작업을 수행함
- (모형의 발전) 향후 몇 년 동안 모형의 많은 세부 사항이 변경될 수 있지만 전체적인 구조는 그대로 유지될 것
 - 문서화 작업도 진행 중이며 모형과 함께 점진적으로 개선될 예정임

2. 보고서 개요(This Documentation)

- 본고는 MAKRO 모형의 2021년 11월 버전에 대한 설명이며 주로 모형 사용자가 연산 코드에 대한 배경 지식을 이해할 수 있도록 기술되었음
- 각 절에는 이론적인 부분에 대한 설명이 포함되어 있음

□ (가계) 모형에는 Optimizing 가계와 Hand-To-Mouth(HTM) 가계 등 두 가지 유형의 가계가 존재

○ Optimizing 가계는 중첩세대 모형 내에서 동태적 생애주기 문제(dynamic life cycle problem)를 해결함

- 이들은 유동자산에 대한 최적의 비내구재 소비와 저축, 최적의 주거, 최적의 구직 노력과 근무 시간을 선택함으로써 효용을 극대화
 - 소비와 저축에 대한 결정은 동태적이고 미래지향적
 - 가계는 유동적인 비주택 순 금융자산(liquid non-housing net financial assets)의 총량을 선택하고, 총 자산량은 데이터에서 추정된 포트폴리오 구성의 다양한 자산에 할당됨
 - 최적의 주택 결정 또한 동태적이고 미래지향적이며 주택담보대출, 주택 감가상각 및 주택 유지관리 비용, 주택가격으로 인한 자본이득 및 토지 판매 수익을 반영함
 - 비내구재 소비 조합에 대한 최적 선택은 비용 최소화 문제의 순서로 구성된 정태적 결정(static decision)
 - 최적의 구직 결정은 동태적이고 미래지향적인 결정

○ HTM 가계²⁾는 금융자산이 없으며 매 기간마다 소득을 비내구재 소비와 주택에 배분함

- HTM 가계를 통해 생애주기 동안 소득에 따라 달라지는 총소비의 모습을 볼 수 있으며, HTM 가계는 소득이 변화한 만큼 모조리 지출하므로 소득 충격 발생 시 총 한계소비성향을 증가시킴
- 사망 시 유산에 대한 자기만족적 효용(warm glow utility)을 얻음
- 유산은 optimizing 에이전트가 남긴 대로 받음
- 서로 다른 연령에서 주고받은 유산 사이의 도표화 작업은 데이터에서 추정된 할당 행렬(allocation matrix)로 이루어지며, 이는 외생적으로 모형에 입력됨

□ (생산 및 가격 설정) 국내 생산은 민간기업과 정부에 의해 이루어지며, 경제에는 8개의 광범위한 상품 및 서비스 등급에 해당하는 8개의 민간 생산 부문이 존재함

2) 당해 기간에 벌어들인 가치분소득 거의 전부를 당해 기간에 소비하는(HTM, Hand-To-Mouth) 가계로, 보유 자산이 없는 데다 차입도 어렵기 때문에 결국 소비를 평활화하지 못하고 현재의 가치분소득으로만 소비(hand-to-mouth)할 수밖에 없게 됨(정용승·송승주, 2019)

- 각 부문에서 기업은 자본, 노동 및 원료(중간재)를 사용하여 산출물을 생산하고, 투입물은 생산함수와 결합하여 산출물 단위를 생성
 - 자본은 미래지향적으로 투자 결정을 내려야 하는 시간 제약과, 시간을 고려하여 최적 결정을 내려야 하는 투자 조정 비용의 제약을 받음
 - 자본재는 국내 및 해외의 여러 공급원에서 구매 가능
 - 고용 조정은 미래지향적이며 마찰이 있을 수 있음
 - 기업은 통제할 수 없는 확률로 결원(from posting vacancies)이 발생함에 따라 비용 발생
 - 원료의 최적 사용은 정태적으로 결정되며, 자본재와 마찬가지로 여러 공급 부문과 국내 및 해외 공급원 모두에서 구입 가능
 - 기업은 투입물 시장에서 가격 수용자
 - 민간 기업들은 투입물의 최적 사용에 관한 결정을 내릴 뿐 아니라, 가격을 책정하여 기업 가치를 극대화함
 - 가격 설정 행동은 주어진 대로 최적의 투입물을 결정하는 것이며, 나머지 기업 최적화에 비해 모형의 독립적인 부분임
 - 가격 설정 문제는 독점적 경쟁 모형에 가격 조정 비용을 추가하며, 이로 인한 가격 조정은 느리고 미래지향적임
 - 공공 생산은 민간 생산과 다르며 정부에 관한 장에서 설명함
- (노동시장) 노동시장 모형에는 이질적인 가계와 기업이 포함되어 있으며, 서로 다른 연령의 가계는 공급 시간과 최적의 직업 탐색 노력 수준을 선택
- 노동 수요는 최적으로 고용하려는(posting vacancies optimally) 다른 부문의 기업으로부터 발생
 - 매칭 기술(A matching technology)로 공석과 일자리를 찾는 노동자를 연결
 - 시장은 노동자를 대표하는 노조와 시장 임금을 정하는 기업 간의 협상으로 성립
 - 임금 경직성은 시차적 임금 협상을 통해 도입
- (수출) 수출은 MAKRO에서 생성된 수입의 결정 요인을 반영할 뿐만 아니라 다양한 무역 모델을 통합하는 축소된 형태로 모델링됨

- 수출수요 방정식은 수출 시장의 규모, 시장에서 국가 경쟁력을 나타내는 물가 비율 측정, 국내 생산량, 수출 지연을 포함함
 - 다양한 수출 상품에 대한 수출수요의 가격탄력성은 소규모 개방경제 모형에서와 같이 MAKRO의 기본적인 모수(fundamental parameters)임
- (정부 및 공공생산) MAKRO의 주요 목적 중 하나는 정부예산균형과 균형이 충격과 정책 변화에 어떻게 반응하는지 결정하는 것
- 회계적 관점에서 정부 재정수지는 정부 수입에서 정부 지출을 뺀 금액
 - 정부 지출은 주로 정부 소비와 소득 이전으로 구성
 - 이는 인구 통계, 고용 수준, 그리고 부분적으로는 규제 제약으로 인해 임금 수준과 밀접하게 연결되어 있음
 - 정부 수입은 주로 조세공과(taxes and duties)로 구성
 - 주요 세목에는 고용과 임금 수준에 따라 달라지는 개인소득세, 기업의 소득에 따른 법인세, 총수요의 수준과 구성에 따라 달라지는 세금 등이 있음
 - 경제적 관점에서 정부는 상품을 생산하므로 공공생산이론이 필요함
 - 공공생산이론은 생산함수에 대한 설명에 기반을 두지 않고, 생산에 들어가는 투입물의 가치를 기반으로 구축된다는 점에서 민간의 경우와 다름
 - 공공 부문에서는 감가상각비, 임금 지급 및 중간재 비용으로 구성
 - 정부는 대규모 고용주로서 경제 균형에 영향을 미치고 일부 투입물 사용을 좌우할 수 있어 모형의 행태에 영향을 미침
- (투입산출 구조) 투입산출 체계(Input-/Output system)는 원료, 민간 소비, 정부 소비, 투자 및 수출에 대한 수요가 국내외 생산자의 공급으로 충족되는 시장 청산 조건의 집합
- (공급 측면) 9개의 국내 생산 부문과 9개의 해외 생산 부문으로 구성
 - 외국 건설 부문이나 공공재 공급자로부터 구매가 0인 경우 이들 중 일부는 수량이 0이 될 수 있음
 - (수요 측면) 공급 측면과 동일하게 9개 부문으로 세분화하여 구성
 - 수요재는 중간재 집계(intermediate aggregation)가 이질적으로 이루어짐
 - 기업의 자본재 투자는 소수의 생산 부문에서만 발생함

- 가계가 필요로 하는 소비재는 9개의 생산된 재화를 5개의 서로 다른 소비재로 결합한 중간재 집합체임
- 수출재는 경제의 맨 하단에서 생산된 9개의 상품의 또 다른 재구성임
 - 예를 들어 가계가 필요로 하는 5가지 소비재와 9가지 다른 생산 부문 간의 매핑은 가계로부터의 직접 수요와 중첩된 하위 효용함수 층을 통해 다른 생산 부문으로 들어오는 수요로 볼 수 있음
- 수요 측 구성의 맨 하단에는 대체 집합체의 일정한 탄력성에 의해 주어지는 국내 생산과 수입 간 분해(decomposition) 단계가 있음
 - 해당 단계에 가격 변화에 대응하는 국내 공급과 해외 공급 간 대체 가능성(substitutability)이 있으며, 이때 가격은 모형에서 가장 세분화된 가격으로 세금이 포함됨
- (캘리브레이션과 추정) 모든 장에 각각의 모수 값을 찾는 방법에 대한 설명이 포함되어 있으며, 'The empirical basis for MAKRO' 문서에 다양한 절차에 대한 추가 설명이 포함되어 있음
 - 대부분의 모수는 최신 버전에서 1,500개 이상의 사용 가능한 데이터를 사용하여 계측되며 모형은 국민계정과 일치함
 - 이들 대부분은 CES 함수의 척도 모수와 같은 '수준 모수'로, 데이터가 포함된 내생 변수에 대해 MAKRO의 해가 적절한 수준에 도달하도록 보장함
 - 계측된 모수의 대부분은 정태적(static) 단일 관계/식을 사용하여 결정되며, 데이터를 사용하여 이러한 모수를 구하는 것이 정태적 캘리브레이션 절차임
 - 이용 가능한 과거 데이터 기간에 대한 이러한 모수의 시계열을 생성하고, 다른 모수는 미래지향적 1계 조건과 같은 동태적 관계를 사용하여 결정됨
 - 이러한 모수는 동태적 보정 절차에서 복구되며, 동태적 보정을 수행하기 전에 정태적 보정을 통해 얻은 일부 모수를 예측해야 함
 - 정태적 캘리브레이션 과정은 다른 모수에 대한 과거 시계열을 생성하며, 이러한 시계열은 성장하는 서비스 부문과 같은 구조적 추세를 표시할 수 있음
 - 또한 단기 변동과 구조적 단절을 포착하며, 이 정보는 모수 값을 예측하기 위해 ARIMA 모델을 사용하여 계량경제학적으로 처리됨
 - 이를 통해 관련 모수를 복구하기 위한 미래지향적 방정식(forward looking equations)

을 풀 수 있음

- 마지막으로, 일부 모수는 단기 변동 행동과 밀접한 관련이 있음
 - 이러한 모수는 모형에 충격 발생 시 임의 데이터의 충격 반응(resulting impulse responses)을 실제 데이터로 추정된 SVAR 모형 결과와 비교하여 추정됨

3. 모형 코딩 설정(Computational MAKRO)

- MAKRO는 비선형 방정식의 대규모 시스템을 해결하기 위한 효율적인 소프트웨어인 GAMS로 코딩됨

가. 표기법

- 모델에서 많은 변수와 모수의 이름을 지정하는 시스템상 문제가 존재
 - 문서의 표기법은 코드와 일치하지만 동일하지는 않으며, 코드에서 거의 모든 개체는 조밀한 계산 환경에서 식별할 수 있도록 설명하는 긴 이름을 가짐
 - 코드의 사용자는 덴마크인이기 때문에 코드 이름은 대부분 덴마크어로 되어 있지만 문서는 보편적으로 이해할 수 있도록 모델의 작업 언어가 영어로 되어 있음
- 코드의 이름을 몇 가지 간단하게 조직적으로 구분하여 선택하였음
 - 수량에는 접두어 q 를, 가격에는 접두어 p 를, 명목 값에는 접두어 v 를 붙이는 식
 - 코드에서 많은 변수를 상식적으로 인식 가능함: K 는 자본, L 은 노동, C 는 소비, Y 는 산출 등
- 문서(documentation)상 대부분의 개체 이름은 쉽게 표기하기 위해 짧게 설정하였으며, 그리스 문자는 학술 문헌의 일반적인 용도를 따르는 모수 표기에 사용함
 - 예를 들어 감가상각률은 코드에서는 긴 이름을 가지지만 문서에서는 δ 로 분류
 - 문서에 자주 등장하는 그리스 문자는 μ 인데, 이 문자는 생산과 소비 부문에서 일반적으로 널리 사용되는 CES 접근법의 가중치 모수(share parameters)를 나타내며 코드에서는 u 로 대체

- 문서에서 μ 는 혼동의 위험 없이 다른 장에서 동일하게 사용되지만 코드에서 u 는 식별을 위해 추가 문자와 인덱스가 추가됨
- 변수 이름을 구성할 때 서로 다른 집계 수준에서 동일한 개체의 이름을 지정함
 - 예를 들어 연령별 수량을 집계하거나 고려하기 위해 변수 이름을 확장하거나 추가로 색인을 달아 동일한 이름을 사용하여 지정
 - 상위 집합 s^* 는 s 의 9가지 다른 생산 부문에 속하는 9개 항목뿐만 아니라 집합 s 에 포함된 요소의 다른 하위 집합도 포함할 수 있으며, 변수 이름을 변경하지 않고도 다양한 수준의 집계 가능함
- 변수 설정에서 가장 중요한 집합으로는 현재 2000년부터 2099년까지의 시간(t), 16세에서 100세까지 포함하는 연령(a), 8개 민간 부문과 1개 공공 부문을 식별하는 9개의 값을 갖는 비수치(non-numerical) 집합 s 가 있음
 - 자본재, 소비재, 수출재 및 중간재를 지수화한 집합도 있으며, 그중 소비(c), 수출(x), 중간재(r) 집합은 9개 부문 생산 집합의 수요 측면을 재구성한 것
 - 자본재 집합은 독립적인 집합으로 기계, 건물, 재고를 포함

나. 코드 구성

- 코드는 보고서에 언급된 이론적인 장을 반영하는 여러 단위(모듈)로 나뉨
 - 모듈은 따로따로 해를 구할 수 있지만 각각 다른 모듈의 입력 및 출력 데이터로도 사용됨
 - 코드 모듈은 소비자 및 가계 소득, 금융 및 민간 생산, 가격 책정, 노동시장, 수출, 공공 생산, 정부, 정부 지출 및 정부 수입, 투입과 산출, 세금 및 모듈 총계로 나뉨

II. 모형 설명

1. 가계(Households)

- (개요) 가계는 최적의 저축과 지출을 선택하며 지출 시 여러 유형의 소비재를 선택
 - 특히 중요한 재화는 주택이며 모형은 각 데이터의 중요한 특성을 반영해야 함
 - 주택 소유권(housing ownership), 모기지 부채(mortgage debt), 비주택 자산(non housing wealth), 비주택 소비(non housing consumption)에 대한 생애주기 프로필(life cycle profiles)과 총량 수준(aggregate levels)을 모형에 포함

가. 기본 정의

- (가계 모형) 모형은 이산적(discrete time)이며 완전예측가능(perfect foresight)한 생애 주기의 중첩세대모형(overlapping generations model)임
 - t 기에 연령 a 인 코호트 크기는 $N_{a,t}$ 이며 데이터를 통해 외생적으로 주어짐
 - 가계는 재정적으로 제약이 있거나(financially constrained) 제약이 없는 유형이 존재하며 생애주기 전체에 해당되는 영구적인 상태임
 - 전체 가계 중 γ 비율은 저축 및 대출 활동에 제약이 있으며 이를 HTM(hand to mouth³⁾) 가계라고 함
 - 제약이 없는 $1 - \gamma$ 비율은 비용 없이(no cost) 채권과 자산 시장에 접근 가능함
- (가계 목적) 유형별 가계 문제(household problem)는 생애주기 동안 소득 경로(income path)에 따라 최적의 소비 경로(consumption path)를 선택하는 것임
 - 기간 말에 모든 의사결정이 이루어지며 소득은 실현되고 소비가 이루어짐
 - 소득 경로는 가계가 노동시장 참여를 결정한 것임에 따라 내생적이며, 그 의사결정은 노동시장 절에서 논의함

3) 당해 기간에 벌어들인 가처분소득 거의 전부를 당해 기간에 소비하는 가계로서 Campbell and Mankiw(1989)에서 유사하게 사용

- 비주택 재화 소비는 데이터의 투입산출 구조와 관련 있는 CES 중첩 최적화 시퀀스(CES nest optimization sequence)의 결과임

1) 연령, 소득 및 자산, 효용

- (연령) 개인의 연령은 A 세까지이며, 연령 지수는 $a = 0, 1, 2, \dots, A$ 로 표현
 - $a = 1$ 의 의미는 아동이 태어나서 1세가 될 때까지의 생애 첫 번째 연령임
 - $a = 0$ 은 모형상 아동에 대한 초기 조건에 해당
- (자산) t 기의 연령 a 인 개인의 소비 및 소득 흐름(flows)은 각각 $c_{a,t}$ 와 $y_{a,t}$ 임
 - 비주택 순 금융자산의 누계액(the stock of accumulated non-housing net financial assets) B 는 당기의 의사결정에 따라 당기 말에 확정되어 $B_{a,t}$ 로 표기
 - $B_{a-1,t-1}$ 는 전기 말에 확정된 자산이며 에이전트(agent)가 한 살 더 나이가 들면 당기 t 기로 이월됨
 - 변수 B 는 모기지과 연금 자산을 제외하고 주택 구입 시 발생하는 모든 비모기지(non-mortgage) 은행 부채를 포함
- (효용) 가계는 비내구재(non durable) 소비 $c_{a,t}$ 와 당기 말 소유 주택 재고 $D_{a,t}$ ⁴⁾에 따른 주택 서비스(housing services)로부터 효용 흐름(flow utility) $U_{a,t}$ 를 가짐
 - 효용 흐름은 CES(일정한 대체탄력성) 함수이며 효용의 편미분은 다음과 같음

$$U_{a,t}^c = \frac{\partial U_{a,t}}{\partial C_{a,t}}, \quad U_{a,t}^d = \frac{\partial U_{a,t}}{\partial D_{a,t}}$$
 - 비계약 가계는 부를 소유함으로써 효용 $V_{a,t}^{Wealth}$ 를 얻고, 사망 시 자산을 유산으로 남김으로써 자기만족적 효용(warm glow utility^{5)) $V_{a,t}^{Beq}$ 를 얻음}

4) 주택 모델은 Mankiw(1982)의 내구재 모델을 기반으로 함

5) James Andreoni(1989; 1990)가 개발한 '자기만족 모델(warm-glow model)'에 따르면 사람들은 다른 사람을 돕는 행동을 통해 만족감을 경험. 이 '자기만족감(warm glow)'은 선을 행함으로써 오는 이기적인 쾌락을 의미하며, 이 프레임워크 내에서 사람들은 기부에 대해 이타적 동기와 이기적 동기를 동시에 유지. 덴마크의 MAKRO 보고서도 이러한 의미에서 '자기만족적 효용(warm glow utility)'을 사용했을 것으로 사료됨

- 이 자산은 사망 시 모든 금융자산 $B_{a,t}$ 와 주택에 대한 모든 지분으로 구성
- 제약이 있는 가계는 사망 시 주택을 유산으로 남기지만 최적화 결정을 내리지 않으므로⁶⁾ 자산이나 유산에 대한 효용함수를 정의할 필요 없음

2) 이주

- (이주) t 기에 연령 a 인 인구는 다음과 같으며 일부는 이주를 가거나($E_{a,t}$) 오는($I_{a,t}$) 것을 반영

$$N_{a,t} = N_{a-1,t-1}s_{a-1,t-1} + I_{a,t} - E_{a,t}$$

- 생존율 $s_{a,t}$ 는 t 기에 연령 a 인 개인이 $t+1$ 기에 생존하고 의사결정할 확률임
- 이주 오는 사람들은 거주자와 동일한 소비, 소득, 주택 및 고용을 갖도록 하는 필요 가정을 설정, 그렇지 않으면 모형에 과도한 이질성(heterogeneity)을 야기
- 이주 가는 사람은 자산을 가져가는 것으로 설정
- 주택의 경우 이주 가는 에이전트들은 주택을 팔고, 이주 오는 에이전트들은 주택 없이 오는 것으로 가정
- 총 주택 수는 변하지 않으며 국경을 넘어 거래되지 않는 재화의 특성을 유지

3) 예산제약

- (예산제약) 연령 a , 유형 j 인 개별 가계의 예산제약은 다음과 같음

$$B_{a,t}^j = B_{a-1,t-1}^j + r_{a,t}^j B_{a-1,t-1}^j + y_{a,t}^j - p_t^c c_{a,t}^j - f(D_{a,t}^j, D_{a-1,t-1}^j)$$

$$B_{a^{ini}-1,t-1}^j = \bar{B}^j$$

- $B_{a^{ini}-1,t-1}^j$ 는 아동기로부터 이월되어 최적화를 시작하는 연령(18살)인 a^{ini} 에 사용 가능한 비주택 순 금융자산을 의미
- \bar{B}^j 는 데이터를 통해 계산된 양으로서 II.1.다. 절에서 자세하게 설명
- 소득 $y_{a,t}^j$ 는 임금, 세금, 이전금 및 연금액을 포함

6) II.1.나. 절에서 자세하게 설명

- 유산은 소득에 포함되며 가계는 제약이 있는 에이전트와 비제약 에이전트 모두로부터 유산을 받고, 유산을 남김
- f 는 소유 주택 D 와 관련한 비용함수로서 II.1.라. 절에서 자세하게 설명
- 비내구재 소비 가격 p_t^c 는 유형과 연령에 동일한 CES 총 가격(CES aggregate price)으로서 CES 소비 나무(CES consumption tree)가 모든 유형과 연령에 동일한 것으로 가정함에 따름
- 지수 j 는 명확성을 위해 필요한 경우가 아니면 이하 생략

나. 최적화(Optimization)

- (제약 가계) 재정적으로 제약이 있는 가계는 순 금융자산이 없으므로($B_{a,t} = 0$) 예산제약은 다음과 같음

$$0 = y_{a,t} - p_t^c c_{a,t} - f(D_{a,t}, D_{a-1,t-1})$$

- 제약 가계는 주택과 비내구재 소비 사이에서 최적의 배분 결정을 하는데 이를 명시적으로 모형화하지 않고 다음의 관계식을 통해 추정

$$D_{a,t} - \chi^D D_{a-1,t-1} = \lambda_{a,t}^D \cdot (C_{a,t} - \chi^C C_{a-1,t-1}) \cdot \left(\frac{P_t^D}{P_t^C} \right)^{-\eta}$$

- $\lambda_{a,t}^D$ 는 외생적인 캘리브레이션(calibration) 변수이며, 일정하게 유지되나 모형에 충격을 가하면 전망기간 내에 변화함
- χ 는 습관 모수(habit parameters), η 는 대체탄력성임

1) 비제약 가계(Unconstrained households): 저축 의사결정(savings decision)

- (저축 의사결정) 비제약 가계는 효용 흐름의 할인된 현재가치를 최대화하기 위해 비내구재 소비와 주택에 대한 최적화 결정을 수행
- 동태적 1계 조건식은 의사결정 문제에서 소비 변수를 예산제약으로 대체하고 모든 연령에서 기간 말 자산을 선택함으로써 구할 수 있음

$$U_{a,t}^c \frac{1}{p_t^c} = \frac{1}{p_{t+1}^c} \frac{R_{a+1,t+1}^B}{1+\theta} U_{a+1,t+1}^c s_{a,t} + \frac{1}{1+\theta} s_{a,t} \frac{\partial V_{a,t}^{Wealth}}{\partial B_{a,t}} + \frac{1}{1+\theta} (1-s_{a,t}) \frac{\partial V_{a,t}^{Beq}}{\partial B_{a,t}}$$

$$\text{with } R_{a+1,t+1}^B = \frac{\partial}{\partial B_{a,t}} \{(1+r_{a+1,t+1})B_{a,t}\}$$

- 가계는 소비의 현재 한계효용과 미래 한계효용을 트레이드오프(trade-off)함
- 최적화는 현재 소비 대신 저축을 하여 한계 수익을 얻고, 이를 다음 기의 소비에 사용하는 것과 동일해야 함(사망의 가능성도 고려하면서)을 의미
- 식의 좌변에서는 소득의 마지막 단위를 현재 소비에 사용하여 한계효용 $U_{a,t}^c$ 를 갖는 $1/p_t^c$ 단위 소비를 산출
- 식의 우변에서는 $\left\{ \frac{1}{p_{t+1}^c} U_{a+1,t+1}^c \right\} R_{a+1,t+1}$ 에 생존율 $s_{a,t}$ 가 부여되고 현재의 한계효용과 일치하도록 $\frac{1}{1+\theta}$ 로 할인됨

· $R_{a+1,t+1}^B$ 는 한계수익률(marginal rate of return)

- 또한 우변에서 다음 기에 생존할 경우 추가적인 자산 효용 $\partial V_{a,t}^{Wealth} / \partial B_{a,t}$ 를 얻고, $(1-s_{a,t})$ 의 비율로 사망 시 유산 효용 $\partial V_{a,t}^{Beq} / \partial B_{a,t}$ 를 얻음

□ (생애 마지막 기간) 모형에서는 가계의 수명을 100세로 설정

- 최종 연령의 저축 의사결정 1계 조건식($s_{A,t} = 0$ 대입)에는 유산 효용이 존재

$$U_{A,t}^c \frac{1}{p_t^c} = \frac{1}{1+\theta} \frac{\partial V_{A,t}^{Beq}}{\partial B_{A,t}}$$

- 다만, 생존율을 0으로 설정하면 생애 말 행동의 급격한 변화를 유도하여 모형 내 최적화 결정을 왜곡할 수 있음
- 따라서 생존율은 100세에 관찰되는 실제 비율($s_{A,t} \neq 0$)로 사용하고 101세의 예상 소비를 100세의 소비로 대체하여 다음과 같이 작성

$$U_{A,t}^c \frac{1}{p_t^c} = \frac{1}{1+\theta} \left\{ \frac{1}{p_{t+1}^c} s_{A,t} R_{A,t} U_{A,t}^c + s_{A,t} \frac{\partial V_{A,t}^{Wealth}}{\partial B_{A,t}} + (1-s_{A,t}) \frac{\partial V_{A,t}^{Beq}}{\partial B_{A,t}} \right\}$$

2) 비제약 가계(Unconstrained households): 주거 의사결정(housing choice)

□ (주거 결정) 주거는 내구재 변수이며 소비 전반의 최적화 결정의 한 요소임

○ 주거 결정은 저축 결정과 마찬가지로 관련된 시간 간(intertemporal) 1계 조건을 동반하는 동태적 미래지향적(dynamic forward looking) 의사결정임

$$U_{a,t}^c \frac{1}{p_t^c} \left(\frac{\partial f_t}{\partial D_{a,t}} \right) = U_{a,t}^d + \frac{s_{a,t}}{1+\theta} U_{a+1,t+1}^c \frac{1}{p_{t+1}^c} \left(R_{a+1,t+1}^D - \frac{\partial f_{t+1}}{\partial D_{a,t}} \right) + \frac{s_{a,t}}{1+\theta} \frac{\partial V_{a,t}^{Wealth}}{\partial D_{a,t}} + \frac{(1-s_{a,t})}{1+\theta} \frac{\partial V_{a,t}^{Beq}}{\partial D_{a,t}}$$

$$\text{with } R_{a+1,t+1}^D = \frac{\partial}{\partial D_{a,t}} \{ (1+r_{a+1,t+1}) B_{a,t} \}$$

- 식의 좌변에서는 $1/p_t^c$ 단위의 비내구재 소비를 희생하고 그 돈으로 주택을 추가 구입하면 소비 감소로 인한 한계효용 손실이 발생
- 우변에서는 내구재의 직접 한계효용 $U_{a,t}^d$ 를 얻음. 만일 다음 기에 사망 시 유산 효용 $\partial V_{a,t}^{Beq} / \partial D_{a,t}$ 를 얻고, 생존 시 주택 자산 효용 $\partial V_{a,t}^{Wealth} / \partial D_{a,t}$ 를 얻음
- 또한 우변에서 다음 기에 생존한다면 오늘 주택 구매로 인해 내일 소득의 영향을 받는 비내구재 소비의 한계효용이 발생
 - 주택 투자가 내일 $\frac{\partial f_{t+1}}{\partial D_{a,t}}$ 만큼 줄어든 소득의 영향을 포함하고, 한계수익률 R^D 를 통해 포트폴리오 선택에 의한 주택 의사결정의 영향도 포함
 - 주택 의사결정의 영향은 가계가 모기지 부분에 대해서는 모기지 이자 비용을 직면하고, 비모기지 부분에 대해서는 기회비용을 직면하는 주택의 사용자비용을 설명⁷⁾

3) 1계 조건 병합

□ ($U_{a+1,t+1}^c$ 제거 병합) $t+1$ 기의 소비 한계효용 $U_{a+1,t+1}^c$ 을 제거함으로써 저축과 주택에 관한 1계 조건식을 병합

7) II-1-라. 절에서 추가 설명 참고

- 이 방법은 t 기에 측정된 주택 $D_{a,t}$ 사용자비용 표현식($USER_{a,t}$)을 산출하고 현재 소비 가격과 비교할 수 있기 때문에 유용

$$U_{a,t}^c \frac{1}{p_t^c} \left[\frac{\partial f_t}{\partial D_{a,t}} + \frac{1}{R_{a+1,t+1}^B} \frac{\partial f_{t+1}}{\partial D_{a,t}} - \frac{R_{a+1,t+1}^D}{R_{a+1,t+1}^B} \right] = U_{a,t}^d$$

$$+ \frac{s_{a,t}}{1+\theta} \left[\frac{\partial V_{a,t}^{Wealth}}{\partial D_{a,t}} + \frac{\frac{\partial f_{t+1}}{\partial D_{a,t}} - R_{a+1,t+1}^D}{R_{a+1,t+1}^B} \frac{\partial V_{a,t}^{Wealth}}{\partial B_{a,t}} \right]$$

$$+ \frac{(1-s_{a,t})}{1+\theta} \left[\frac{\partial V_{a,t}^{Beq}}{\partial D_{a,t}} + \frac{\frac{\partial f_{t+1}}{\partial D_{a,t}} - R_{a+1,t+1}^D}{R_{a+1,t+1}^B} \frac{\partial V_{a,t}^{Beq}}{\partial B_{a,t}} \right]$$

where $USER_{a,t} = \frac{\left[\frac{\partial f_t}{\partial D_{a,t}} + \frac{1}{R_{a+1,t+1}^B} \frac{\partial f_{t+1}}{\partial D_{a,t}} - \frac{R_{a+1,t+1}^D}{R_{a+1,t+1}^B} \right]}{\text{User Cost of } D_{a,t} \text{ measured at time } t \text{ in nominal units}}$

- 가계가 주택을 추가로 구입하기 위해 1단위의 현재 소비를 희생할 때, 소비의 한계 효용 손실 $U_{a,t}^c$ 에서 자산과 유산의 한계효용의 이득을 차감한 효용 크기에 대해 주택의 직접 한계효용 $U_{a,t}^d$ 의 가중치를 두어야 함

- ($U_{a,t}^c$ 제거 병합) 소비의 현재 한계효용 $U_{a,t}^c$ 를 제거함으로써 저축과 주택에 관한 1계 조건식을 병합

- 이 방법은 자산과 유산에 대한 효용의 형식(form)과 내용(content)이 주어졌을 때 모형 계산이 수월한 표현을 생성하므로 유용

$$U_{a+1,t+1}^c \cdot \frac{s_{a,t}}{1+\theta} \cdot USER_{a,t} \cdot \frac{R_{a+1,t+1}^B}{p_{t+1}^c} = U_{a,t}^d$$

- 우변에서는 주택을 추가로 구매할 때 해당 주택의 직접 한계효용을 얻음
- 좌변에서는 만일 $USER_{a,t}$ 만큼의 돈으로 주택을 구매하는 대신 그 금액을 자본화

(capitalize) $\frac{R_{a+1,t+1}^B}{p_{t+1}^c}$ 하여 소비한다면 다음 기에 얻을 수 있는 한계효용과 동일

해야 함(생존율과 할인율을 고려)

다. 아동(Children)

- (처리 방식) 아동의 예산제약을 맞추는 것(fitting)이 중요한 이유는 최적화 시작 연령(18세)의 초기 자산을 정확하게 캘리브레이션하고 부모 가계의 과도한 소비를 수정할 수 있기 때문
 - 아동은 최적화하는 에이전트로서 모델링되는 대신 아동의 소비가 부모의 최적화 문제에 내포되어 있고 부모에서 아동으로 외생적 소득 이전 변수를 도입

- (예산제약) 아동은 자산이 없는 상태로 태어나 몇 년간 가처분소득을 가지므로 예산제약은 다음과 같이 주어짐

$$B_{a,t} = B_{a-1,t-1} + r_{a,t}B_{a-1,t-1} + yDisp_{a,t} + Transfer_{a,t}$$

$$B_{0,t} = 0$$

$$0 < a < 18$$

- 초기 조건 $B_{0,t}$ 는 첫 번째 연령 이전부터 갖고 온 자산으로서 연령 지수가 0임
 - 모든 이전 소득은 현재 흐름(current flows)이며 받은 유산은 소득 변수에 포함되므로 초기 조건은 0이어야 함($B_{0,t} = 0$)
- 연령별 아동이 받은 총 이전금은 $Transfer_{a,t} \times N_{a,t}$ 로 해당 연령의 자녀를 가진 성인 코호트로부터 받음
 - 같은 연령의 아동은 부모로부터 동일한 금액을 받는 것으로 가정
 - 서로 다른 연령의 부모들은 다양한 연령의 다양한 수의 자녀를 가지므로 부모의 연령에 따른 자녀 이전금 총액은 다양함
 - 비제약 에이전트로 성장하는 아동만이 이전금의 수혜자가 됨
 - 제약이 있는 아동은 모든 연령(18세가 되어 0의 자산으로 최적화를 시작하기 전까지)에 대해 예산제약을 0으로 설정하므로 이전금이 존재하지 않음
- 데이터에 따라 예산제약식을 캘리브레이션함으로써 첫 번째 최적화 연령(18세)인 에이전트의 초기 자산값을 얻음
 - 부모에서 자녀로의 이전금은 부모의 가처분소득 변수 안에 내포되어 있음

라. 주택 객체 f 설명

- (주택 객체의 특성) 주택은 자재(bricks)와 토지를 결합한 객체임
 - 주택의 자재 부분은 건설 부문에서 구입된 투입 요소를 이용하여 생산됨
 - 국가의 토지 전체 재고는 주택재(housing good)하에서 가계에 의해 점유되며 새 주택 건설에 이용 가능한 토지는 주택 감가상각⁸⁾의 결과로 나온 토지임
 - 중개업자(intermediary)는 건설 부문의 산출물과 기타 중간재를 구매하고 감가상각된 주택에서 나온 토지를 가계로부터 구매해서 이들을 결합하여 주택 재화를 가계에 다시 판매
 - 경직된(rigid) 공급에 생산 요소를 포함하기 위해 MAKRO 모형에 토지를 도입
 - 실제로 토지는 완전히 경직된 요소는 아니므로 토지 총량에 외생적인 증가를 허용 하나 토지의 가격은 주택가격 이동의 핵심 요소⁹⁾임
- (주택 가치) 주택은 가계 부채의 압도적인 요인이며, 주택 금융은 전체 금융 활동의 주요 부분에 해당
 - 주택은 주택 가치(house value) $\mu_{a,t}$ 에 대한 연령별 모기지 비율을 따라 모기지 용자가 이루어지며 이는 주택 가치에 대한 대출 제한(LTV constraint)¹⁰⁾임
 - 주택 가치는 가계에 외생적이나 주택가격의 영향을 포함하기 위해 모델링됨
 - 따라서 모형은 주택 재고 변화에 따른 대규모 이윤과 가격 이동(대규모 이윤이 일정할 때)을 통해 변화하는 모기지 부채 양을 생성
- (임대주택) 모형에 외생적 임대주택 공급 H 와 외생적 임대료를 도입
 - 임대 시장과 소유 주택 시장 간의 연결을 모델링하지 않으므로 임대료는 가계의 예산 제약에서 외생적인 변수일 뿐이며 임대주택은 효용을 발생하지 않음
- (비용함수) 소유 주택은 비용함수 f 를 통해 예산제약에 포함
 - f 는 용자(financing), 세금(taxation), 유지 관리(maintenance) 비용을 포함하고 축소(downsizing) 및 토지 판매에 따른 수입을 제하는 비용함수임

8) 주택의 자재 부분만 감가상각의 영향을 받음

9) Davis and Heathcote(2006)를 참고

10) Kaplan, Mitman and Violante(2017)에서는 소득 대비 대출 제한(LTI constraints)을 사용

- t 기에 연령 a 인 에이전트(agent)의 주택에 대한 순 투자를 다음과 같이 정의

$$z_{a,t} = D_{a,t} - (1 - \delta_t)D_{a-1,t-1}$$

- 첫 번째 최적화 연령에는 $z_{a,t} = D_{a,t}$

- 모기지 부채 재고(mortgage debt stock) $X_{a,t}^M$ 에 대해 다음의 외생적인 관계를 설정하며 주택 가치 $\mu_{a,t}$ 는 가계에 외생적임

$$X_{a,t}^M = \mu_{a,t}P_t^D D_{a,t}$$

- 자산 B , 소득 및 임대주택을 보조 변수 Δ 에 결합

$$\Delta_{a,t} \equiv B_{a,t} - (1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} - \underbrace{\left(\tilde{y}_{a,t} - \text{rent}_t H_{a,t} \right)}_{y_{a,t}}$$

- 다음의 예산제약을 얻음

$$\Delta_{a,t} + P_t^C C_{a,t} + f(D_{a,t}, D_{a-1,t-1}) = 0$$

- 소유 주택에 대한 비용함수는 다음과 같음

$$\begin{aligned} f(D_{a,t}, D_{a-1,t-1}) &= (1 + r_t^{mort})\mu_{a-1,t-1}P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} - \mu_{a,t}P_t^D D_{a,t} \\ &\quad + P_t^D D_{a,t} - P_t^D(1 - \delta_t)D_{a-1,t-1} \\ &\quad + (\tau_t^W + x_t^\delta)P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} \\ &\quad - P_{t-1}^D D_{a-1,t-1}\alpha_t^{Land} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(D_{a,t}, D_{a-1,t-1}) &= (1 - \mu_{a,t})P_t^D D_{a,t} \\ &\quad + \left\{ (1 + r_t^{mort})\mu_{a-1,t-1} + \tau_t^W + x_t^\delta - \frac{P_t^D}{P_{t-1}^D}(1 - \delta_t^d) - \alpha_t^{Land} \right\} P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} \end{aligned}$$

- f 는 비용함수이므로 비모기지 용자($1 - \mu_{a,t}$), 재산세 τ_t^W , 유지 비용 x_t^δ , 모기지 이자 비용 r_t^{mort} 모두 양(+)
의 부호를 나타냄
- 미상각(undepreciated) 주택을 이월($1 - \delta_t$)하고 토지를 판매하여 얻은 소득 α_t^{Land} 는 수입이므로 음(-)
의 부호를 나타냄

- 이 식의 편미분은 사용자비용 표현식과 최적화 조건식에 입력되는데 모든 변수가 가계에 외생적이거나 주어지므로 계산에 용이

1) 사용자비용 및 기대

□ (주택가격 기대) 주택가격에 대한 기대는 가계 의사결정에 중요한 영향을 미침

- 본 모형은 완전예측 모형(perfect foresight model)으로 기대 메커니즘(expectations mechanism)을 도입할 수 없으므로 의사결정에 대한 미래 주택가격의 영향을 조정하는 실용적인 근사치(pragmatic approximation)를 사용
- 에이전트들은 가격이 올바른 방향(correct direction)으로 움직일 것으로 예상하나 총 규모의 λ 비율만 움직이는 것으로 가정

$$E_t(P_{t+1}^D) = (1 + g_p)P_t^D + \lambda(P_{t+1}^D - (1 + g_p)P_t^D)$$

$$E_t(P_{t+1}^D) - P_t^D = (1 - \lambda)g_p + \lambda(P_{t+1}^D - P_t^D)$$

- 주택가격의 기대값은 $\frac{\partial f_{t+1}}{\partial D_{a,t}}$ 항을 통해 주택 비용함수 1계 조건식에 입력됨

$$E_t\left(\frac{\partial f_{t+1}}{\partial D_{a,t}}\right) = \left\{ (1 + r_{t+1}^{mort})\mu_{a,t} + \tau_{t+1}^W + x_{t+1}^\delta - \frac{E_t(P_{t+1}^D)}{P_t^D}(1 - \delta_{t+1}^d) - \alpha_{t+1}^{Land} \right\} P_t^D$$

□ (주택 사용자비용) 예상되는 사용자비용은 앞에서 구한 주택 비용함수의 1계 조건식과

$R_{a+1,t+1}^B \equiv 1 + r_{a+1,t+1}^B$ 와 $R_{a+1,t+1}^D \equiv r_{a+1,t+1}^D$ 임을 적용하여 재작성

$$USER_{a,t} = \underbrace{\left[\frac{\partial f_t}{\partial D_{a,t}} + \frac{1}{R_{a+1,t+1}^B} \frac{\partial f_{t+1}}{\partial D_{a,t}} - \frac{R_{a+1,t+1}^D}{R_{a+1,t+1}^B} \right]}_{\text{User Cost of } D_{a,t} \text{ measured at time } t.}$$

$$USER_{a,t} = \frac{P_t^D}{1 + r_{a+1,t+1}^B} \left[(1 - \mu_{a,t})r_{a+1,t+1}^B + \mu_{a,t}r_{t+1}^{mort} + \tau_{t+1}^W + x_{t+1}^\delta + \delta_{t+1}^d \right] + \\ - \frac{P_t^D}{1 + r_{a+1,t+1}^B} \left[\left(\frac{E_t(P_{t+1}^D) - P_t^D}{P_t^D} \right) (1 - \delta_{t+1}^d) + \alpha_{t+1}^{Land} \right] - \frac{r_{a+1,t+1}^D}{1 + r_{a+1,t+1}^B}$$

- 이자율 항은 주택의 비모기지 부분에 해당하는 기회비용, 모기지 부분에 대한 모기지

을 비용과 주택 양 변화에 따른 포트폴리오 수익에 대한 한계 효과를 포함

마. 유산(Bequests)

- (유산 효용 개요) 유산의 자기만족적 효용(warm glow utility)은 모형상 생애주기 말에 막대한 부를 보유할 수 있도록 하는 기본 요소임
 - 유산 효용함수의 형태는 생애주기의 어린 연령대에 발생한 가계 부채를 제한하고 모형에서 예비적 저축과 신용 제한(credit constraints)을 모두 대체함¹¹⁾

1) 사망(Death)

- (사망) 사망의 주요 특성은 관련 의사결정이 내려지기 전에 발생한다는 것임
 - t 기의 1월 1일에 에이전트(agent)는 생존하거나 사망함
 - 생존하는 경우 소비하거나 저축을 위해 12월 31일까지 365일을 기다려야 함(당기 말에 의사결정이 확정되기 때문)
 - 사망한 경우 더 이상의 소득이 발생하거나 소비 또는 저축하지 않으며 고인의 자산은 상속인에게 외생적 소득 이전으로 배분됨. 이 소득 이전은 t 기의 12월 31일에 이루어짐

2) 유산, 주택 매각 및 유산 효용

- (유산) 모든 에이전트는 제약 및 비제약 에이전트로부터 유산을 받거나 제약 및 비제약 에이전트에게 유산을 남김
 - 제약이 있는 에이전트는 0의 순 금융자산을 남기지만 제약이 없는 에이전트와 마찬가지로 주택을 남김
 - 사망 시 주택은 매각되고 모기지지는 청산되며 따라서 유산은 유동자산과 청산 후 주택의 유동 가치로 구성됨
 - 외생적인 모기지 비율이 주어짐에 따라 사망 시 다음 기에 유동자산으로 전환되는 자산은 다음과 같음

$$(1 - \mu_{a,t})P_{t+1}^D D_{a,t}$$

11) 자산 효용함수는 유산 효용함수와 이와 같은 특성을 공유하되 모형상 두 함수가 다른 점을 이 절에서 설명

- 주고받은 유산은 세금을 감안한 후의 금액이 동일해야 함
 - 받은 유산과 남긴 유산의 매핑(mapping)은 데이터로 구성된 할당(allocation) 매트릭스 M_t 로 이루어짐
- (유산 효용) 유산은 예산제약에 포함되지 않고 선호(preference)에 중요한 객체로서 사망한 에이전트의 유산 효용은 다음과 같음

$$V_{a,t}^{Beq} \equiv \xi_a^{0Beq} \frac{[X_{a,t}^{Beq}]^{1-\eta}}{1-\eta}$$

$$\text{with } X_{a,t}^{Beq} \equiv (1 - \tau_{t+1}^{beq}) \frac{B_{a,t} + p_t^D (1 - \mu_{a,t}) D_{a,t} + V_{a,t}^{PensionB}}{p_{t+1}^C} + \xi_a^{1Beq}$$

- 효용이므로 $X_{a,t}^{Beq}$ 에 자유도(degree of freedom)가 존재한다는 점이 중요
 - 예를 들면 주택에 별도의 가치를 부여하는 대신 자산의 합에 가치를 부여
 - 자산의 합을 이용하여 X 에 연금 수급권을 포함하는 것은 대체성을 허용하는 것이므로 가계는 어떤 유형의 자산이 더 부유하게 만드는지 또는 그 자산을 상속받은 사람들을 부유하게 만들지 여부에 대해 무관하게 됨
 - 또한, 효용함수의 기본적인 특성은 오목한(concave) 증가함수임
- 효용함수의 미분은 다음과 같음

$$\frac{\partial V_{a,t}^{Beq}}{\partial B_{a,t}} = (1 - \tau_{t+1}^{beq}) \frac{1}{p_{t+1}^C} \Omega_{a,t}^{Beq}$$

$$\frac{\partial V_{a,t}^{Beq}}{\partial D_{a,t}} = (1 - \tau_{t+1}^{beq}) \frac{(1 - \mu_{a,t}) p_t^D}{p_{t+1}^C} \Omega_{a,t}^{Beq}$$

$$\text{with } \Omega_{a,t}^{Beq} \equiv \xi_{a,t}^{0Beq} [X_{a,t}^{Beq}]^{-\eta}$$

- 유산과 연관된 효용은 $\xi_{a,t}^0$ 와 $\xi_{a,t}^1$ 로 모수화(parameterized)
 - 내부 모수(interior parameter) $\xi_{a,t}^1$ 는 사망 시 총 자산이 음수(-)일 가능성을 수용하기 위해 일부 연령(아마도 어린 연령대)에서는 강하게 양수(+)일 것임
 - $\xi_{a,t}^1$ 의 상한은 결합된 자산의 하한을 의미하며 이는 부채의 상한으로서 모형상 예비적 저축과 같음

바. 1계 조건의 병합

□ (1계 조건 병합) 유산 효용과 자산 효용의 1계 조건식 병합을 통해 간단하고 통찰력 있는 표현식을 도출

○ 자산 효용은 다음과 같음

$$V_{a,t}^{Wealth} \equiv \xi_a^{0Wealth} \frac{[X_{a,t}^{Wealth}]^{1-\eta}}{1-\eta}$$

$$X_{a,t}^{Wealth} \equiv \frac{B_{a,t} + p_t^D (1 - \mu_{a,t}) D_{a,t} + V_{a,t}^{PensionW}}{p_{t+1}^C} + \xi_a^{1Wealth}$$

$$\Delta_{a,t}^{Wealth} \equiv \xi_{a,t}^{0Wealth} [X_{a,t}^{Wealth}]^{-\eta}$$

- 탄력성 η 은 자산 및 유산 효용 객체에서 동일하며, 자산 효용함수도 유산 효용함수와 마찬가지로 일부 연금 수급권을 포함한 총 자산만 중요

○ 각 1계 조건식을 병합하여 다음을 작성

$$\frac{s_{a,t}}{1+\theta} \frac{1}{p_{t+1}^C} \left[(1 - \mu_{a,t}) p_t^D + \frac{\frac{\partial f_{t+1}}{\partial D_{a,t}} - R_{a+1,t+1}^D}{R_{a+1,t+1}^B} \right] \Delta_{a,t}^{Wealth}$$

$$+ \frac{(1 - s_{a,t})}{1+\theta} \frac{(1 - \tau_{t+1}^{beq})}{p_{t+1}^C} \left[(1 - \mu_{a,t}) p_t^D + \frac{\frac{\partial f_{t+1}}{\partial D_{a,t}} - R_{a+1,t+1}^D}{R_{a+1,t+1}^B} \right] \Omega_{a,t}^{Beq}$$

○ 위의 식에 사용자비용 표현식을 사용하여 재작성

$$\equiv + \frac{1}{1+\theta} \frac{USER_{a,t}}{p_{t+1}^C} \{ s_{a,t} \Delta_{a,t}^{Wealth} + (1 - s_{a,t}) (1 - \tau_{t+1}^{beq}) \Omega_{a,t}^{Beq} \}$$

○ 두 개의 1계 조건을 병합한 결과로 다음 식을 도출

$$U_{a,t}^c \left[\frac{USER_{a,t}}{p_t^c} \right] - \left[\frac{1}{1+\theta} \frac{USER_{a,t}}{p_{t+1}^C} \right] \{ s_{a,t} \Delta_{a,t}^{Wealth} + (1 - s_{a,t}) (1 - \tau_{t+1}^{beq}) \Omega_{a,t}^{Beq} \} = U_{a,t}^d$$

- 주택의 한계효용 증가분은 소비 감소에 따른 한계효용 감소분에 자산 증가에 따른 한계효용 증가분을 제한 것과 동일

- (유산 효용과 자산 효용의 차이) 유산 효용과 자산 효용 내 연금 지급액은 다름
 - 유산 효용의 경우 일부 연금은 사망 시 중단되는 반면 일부는 보험 요소를 포함하고 있어 후손에게 계속 지급되며 $V_{a,t}^{PensionB}$ 이 후손에 지급되는 연금액임
 - 자산 효용의 경우 가계가 특정 연령에 도달하면 ‘자본연금(kapitalpension)’ 및 ‘퇴직금(aldersopsparing)’ 중에서 지급 일정을 자유롭게 선택 가능
 - 많은 가계가 대체로 전액 지급할 수 있는 퇴직 후 20년이 되는 날까지 인출하지 않을 것을 선택
 - 이러한 유형의 연금은 유동성 측면에서 주식 및 채권에 가깝고 효용함수 측면에서도 동일한 방식으로 취급되므로 퇴직 후 20년에 전체 금액을 다른 자산으로 전환해도 효용이 지나치게 크게 증가하지 않음
 - 따라서 $V_{a,t}^{PensionW}$ 는 유산 효용의 연금 객체와는 다름

사. 가계 소득

- (가계 예산제약) 가계의 예산제약은 다음과 같이 주어짐

$$B_{a,t} = B_{a-1,t-1} + r_{a,t}B_{a-1,t-1} + y_{a,t} - f(D_{a,t}, D_{a-1,t-1}) - P_t^C C_{a,t}$$

- 소득 항 $y_{a,t}$ 는 세금, 이전소득 및 임대주택에 따른 외생적 지출을 제한한 금액임
- 자산 B 는 비주택 순 금융자산(non housing net financial assets)을 의미하고 연금 자산은 제외함
 - 은행 예금과 주식 및 채권의 소유권을 포함하고 비모기지 은행 부채는 제함
- 객체 f 는 소유 주택 비용함수로서 소유 주택에 따른 총 순지출임
- $P_t^C C_{a,t}$ 는 비주택 소비 지출을 의미하고 소비 가격에는 세금이 포함됨
- 자산 수익률 $r_{a,t}$ 는 수익 포트폴리오 비율임

1) 소득

- (소득) 소득 $y_{a,t}$ 에는 고용 및 비고용에 따른 노동시장 소득 $y_{a,t}^W$, 순 연금 소득 $y_{a,t}^{PY} - y_{a,t}^{PC}$, 순 세금 및 이전금 $T_{a,t}^{Net}$ 를 포함하고 임대주택에 대한 지출을 제함

$$y_{a,t} = y_{a,t}^W + y_{a,t}^{PY} - y_{a,t}^{PC} - R_t^{rent} H_{a,t} + T_{a,t}^{Net}$$

$$\text{with } T_{a,t}^{Net} = T_{a,t}^Y - T_{a,t}^\tau + T_{a,t}^{Beq} + T_{a,t}^{children} + T_{a,t}^{other}$$

- 소득 항목 중에서 노동시장 소득만이 가계가 노동시장에 얼마나 참여하는지에 대한 의사결정의 결과이므로 가계에 내생적임
- 순 세금 및 이전금 $T_{a,t}^{Net}$ 는 이전금 $T_{a,t}^Y$, 받은 유산 $T_{a,t}^{Beq}$, 아동과 관련된 순 소득 흐름(net income flows) $T_{a,t}^{children}$ 등을 합하고 주택이나 연금과 관련 없는 세금 $T_{a,t}^\tau$ 12)을 제함

2) 다양한 소득 정의

□ (다양한 소득 개요) 예산제약에서 소득을 다양한 방법으로 정의할 수 있음

- 앞 절의 소득 변수 $y_{a,t}$ 는 총 금융 소득과 소유 주택 관련된 항은 제외함
 - 이는 모형과 1계 조건을 다루기 편리하나, 데이터와 보다 관련 있도록 소득을 정의하는 다른 방법을 소개

□ (금융 소득 추가) 기존의 소득 변수에 금융 소득을 추가할 수 있음

$$B_{a,t} = B_{a-1,t-1} + \underbrace{r_{a,t} B_{a-1,t-1} + y_{a,t}}_{\text{including net financial income}} - f(D_{a,t}, D_{a-1,t-1}) - P_t^C C_{a,t}$$

- 예산제약에서 사용되는 자산 수익 $r_{a,t} B_{a-1,t-1}$ 는 총 수익이며 금융 소득에 대한 세금 $\tau_{a,t} B_{a-1,t-1}$ 은 소득 $y_{a,t}$ 내의 $T_{a,t}^\tau$ 항에 포함되어 있음
 - 따라서 합계 $r_{a,t} B_{a-1,t-1} + y_{a,t}$ 는 세금을 제한 순 금융 소득을 포함하게 됨
- 예산제약 상에서 이자 소득에 대해 직접적으로 세율을 사용하지 않는 이유는 소득(이자 소득, 임금 등)의 합계에 세율을 적용하는 방식으로 과세하기 때문
 - 추가적인 가정 없이는 수익에 대한 세금을 구별할 수 없으나 1계 조건에서는 수익에 대한 한계세율이 필요

12) 소득세, 지방세, 재산세, 주식에 따른 금융소득세, 개인소유기업 소득세, 부동산세, 노동시장 특정세(labor market specific taxes) 등을 포함

- 수익은 주식, 채권, 예금, 은행 부채를 포함하는 포트폴리오 수익임
 - 주식은 평균 수익률(높은 수익은 가중치 0.2 부여)로 과세되고 채권과 은행 예금은 현재 코호트의 평균에 따라(최고 세금을 내는 인구 비율이 연령별로 다르므로 한계세율은 연령에 따라 다름) 동일한 세율을 적용

□ (소유 주택 관련 항목 고려) 주택 객체 f 안에 있는 재산세 $\tau_t^W P_{t-1}^D D_{a-1,t-1}$ 를 소득항에서 제함

$$B_{a,t} = B_{a-1,t-1} + \underbrace{r_{a,t} B_{a-1,t-1} + y_{a,t} - \tau_t^W P_{t-1}^D D_{a-1,t-1}}_{\text{including net financial income and removing wealth taxes}} - \hat{f}_{a,t} - P_t^C C_{a,t}$$

$$\text{with } \hat{f}_{a,t} = f(D_{a,t}, D_{a-1,t-1}) - \tau_t^W P_{t-1}^D D_{a-1,t-1}$$

○ t 기에 의사결정이 내려지기 이전의 전체 가처분소득은 다음과 같음

$$\underbrace{r_{a,t} B_{a-1,t-1} + y_{a,t} - \left[\tau_t^W + r_t^{\text{mort}} \mu_{a-1,t-1} + x_t - \delta_t \frac{\alpha_t^{\text{Land}}}{P_{t-1}^D} \right] P_{t-1}^D D_{a-1,t-1}}_{\text{including NFI, excluding rental housing, removing wealth taxes, mortgage interest, and maintenance, adding land sales}}$$

- 세금은 전 기로부터 이월된 비용이며 t 기에 의사결정을 내리기 이전에 가처분소득을 감소시킴
- 주택 유지비 x_t 와 주택 모기지 비율 $\mu_{a-1,t-1}$ 에 대한 모기지 이자 지불금 r_t^{mort} 도 의사결정을 내리기 이전에 가처분소득을 감소시킴
- 반면 감가상각된 부동산의 토지 판매 소득은 가처분소득을 증가시킴

○ 마지막으로 임대주택 비용은 소비 의사결정이므로 모형에서는 일시금 항목이지만 데이터상에는 가처분소득의 일부가 아니므로 다음과 같이 쓸 수 있음

$$\underbrace{r_{a,t} B_{a-1,t-1} + y_{a,t} + R_t^{\text{rent}} H_{a,t} - \left[\tau_t^W + r_t^{\text{mort}} \mu_{a-1,t-1} + x_t - \delta_t \frac{\alpha_t^{\text{Land}}}{P_{t-1}^D} \right] P_{t-1}^D D_{a-1,t-1}}_{\text{including NFI, excluding rental housing, removing wealth taxes, mortgage interest, and maintenance, adding land sales}}$$

3) HTM 가계의 소득

□ (HTM 가계 소득) HTM 가계의 소득은 모형과 일치하지 않음

○ 자본 소득세와 재산세는 $T_{a,t}^r$ 에 포함되어 있으나 데이터에 대한 추가적인 가정 없이는 제거될 수 없음

- 이자 소득에 대한 세금과 이자 비용도 마찬가지로 각각 개인소득세/과세소득의 일부
이나 구분할 수 없는 반면, 주식소득세는 제거 가능
- 따라서 HTM 에이전트의 소득은 다음과 같은 수식 수정을 통해서 최적화하는 에이전
트의 소득과 동일

$$y_{a,t}^{HTM} = y_{a,t} + T_{a,t}^{Stocks}$$

아. 연금

- (연금 모형 개요) MAKRO는 DREAM 연금 모형의 단순화된 버전을 사용하고 연금 소득
과 연금 자산은 가계에 외생적으로 입력됨
- 데이터는 DREAM 연금 모형에서 가져오고 세 가지 유형의 연금으로 집계
 - ① 이미 과세된 연금: 퇴직금(alderopsparing)으로서 모형에서 'alder'로 표기
 - ② 고정 세율로 과세되는 연금: 자본연금(kapitalpension)에 해당하며 모형에서 'Kap'
로 표기
 - ③ 가계 수령 시 과세되는 기타 연금의 총합: 분할연금(ratepensioner), 연금(livrentepensioner),
노동시장보충연금(ATP) 등의 합으로서 모형에서 'PenX'로 표기
- MAKRO는 코호트 내 성별을 구별하지 않으므로 남성과 여성이 받는 연금액과 남성
과 여성이 지불한 연금 기여금을 연금 기금에 각각 합산

1) 연금 자산

- (연금 자산의 운동법칙) j 로 지수화된 세 가지 유형의 연금은 보험계리적으로 공정한 연
금제도로 모델링됨
- 주어진 연금제도 j 하에서 개인의 연금 자산에 대한 운동법칙(the law of motion)은
가계의 순 금융자산의 운동법칙과 유사

$$B_{a,t}^{P,j} = \left(B_{a-1,t-1}^{P,j} + \underbrace{r_{a,t}^{P,j} B_{a-1,t-1}^{P,j}}_{TR_{a,t}^{P,j}: Total\ Return} \right) \frac{N_{a-1,t-1}}{N_{a,1}} + y_{a,t}^{PC,j} - y_{a,t}^{PY,j}$$

- 연금 자산의 재고 $B_{a,t}^{P,j}$ 는 특정 코호트의 수급자에게 연금 소득으로 지급 가능한 연
기금 내 자산액임

- $y_{a,t}^{PC}$ 는 가계가 연기금에 지불하는 연금 기여금을 의미
- $y_{a,t}^{PY}$ 는 연기금에서 나가고 가계가 지급받는 연금 소득을 의미
- 가계의 총 연금 자산은 연금 유형 j 에 대한 합으로 주어짐

$$B_{a,t}^P = \sum_j B_{a,t}^{P,j}$$

- 주어진 연기금 j 의 총 연금 자산은 다음과 같이 주어짐

$$B_t^{P,j} = \sum_a N_{a,t} B_{a,t}^{P,j}$$

- 연금 유형 지수 j 는 설명에 필요한 경우 아니면 생략
- $B_t^{P,j}$ 는 가계의 연금 자산이자 연기금의 부채임
- 연기금은 영 이윤(zero profit)을 따르므로 자산과 가계에 대한 부채가 동일

2) 연금 기여금 및 연금 소득

- (연금 기여금 및 연금 소득) 임금의 일부가 외생적으로 연금 기여금으로 지급되고 연금 자산의 일부가 외생적으로 연금 소득으로 가계에 지급되는 것을 가정

$$y_{a,t}^{PC} = \lambda_{a,t}^{PC} \cdot w_{a,t}$$

$$y_{a,t}^{PY} = \lambda_{a,t}^{PY} \times B_{a-1,t-1}^P$$

- 모수 $\lambda_{a,t}^{PC}$ 와 $\lambda_{a,t}^{PY}$ 는 DREAM의 연금 데이터와 일치하도록 캘리브레이션됨
- 연금 시스템은 모든 연금 기여금이 결과적으로 가계에 지급되도록 캘리브레이션되며 이는 모형에서 수명을 100세로 설정한다는 사실을 고려함

3) 유한한 수명

- (100세 이전의 사망) 고인의 자산은 유산으로서 가계 예산제약에 포함되는 반면 고인의 연금 자산은 연기금에서 관리되고 연금 수급자에게 보너스 형태로 재분배됨
- 따라서 소득 $y_{a,t}^{PY}$ 는 보너스 지급금을 포함하므로 '일반(normal)' 소득 $\tilde{y}_{a,t}^{PY}$ 과 '사망 보너스(death bonus)'로 구분

$$y_{a,t}^{PY} N_{a,t} = \tilde{y}_{a,t}^{PY} N_{a,t} + \underbrace{(1 + r_{a,t}^p) B_{a-1,t-1}^P (1 - s_{a-1,t-1}) N_{a-1,t-1}}_{\text{death bonus}}$$

○ 위의 수식을 반영하여 연금 자산의 운동법칙(law of motion)을 재작성

$$B_{a,t}^P = (1 + r_{a,t}^p) B_{a-1,t-1}^P \frac{N_{a-1,t-1}}{N_{a,t}} + y_{a,t}^{PC} - \underbrace{\tilde{y}_{a,t}^{PY} - (1 + r_{a,t}^p) B_{a-1,t-1}^P (1 - s_{a-1,t-1}) \frac{N_{a-1,t-1}}{N_{a,t}}}_{\text{Total Pension Income per Person}}$$

- 정리하여 재작성

$$B_{a,t}^P = (1 + r_{a,t}^p) B_{a-1,t-1}^P \left[s_{a-1,t-1} \frac{N_{a-1,t-1}}{N_{a,t}} \right] + y_{a,t}^{PC} - \underbrace{\tilde{y}_{a,t}^{PY}}_{\text{Normal Income per Person}}$$

□ (100세에서 종료) 연금 자산 축적은 100세 이상을 포함한 모든 연령에서 연금 자산 재고와 흐름 그대로 모델링됨

○ 즉, 연금 자산은 100세에 사라지지 않지만 모형에서는 101세의 생존자가 존재하지 않으므로 보험 계리 원칙에 따라 100세에 말기 자산을 일괄 지불(balloon payment) 하는 형태로 지급

$$0 = (B_{A-1,t-1}^{P,j} + TR_{A,t}^{Pj}) \frac{N_{A-1,t-1}}{N_{A,t}} + y_{A,t}^{PC,j} - \underbrace{(y_{A,t}^{PY,j} + B_{A,t}^{P,j})}_{\text{Total Payment}}$$

○ 따라서 말기에 코호트가 사망하더라도 연기금은 사라지지 않으며 총 연금 자산은 다음과 같이 주어짐

$$B_t^P = \sum_a^{A-1} N_{a,t} B_{a,t}^P$$

○ 참고로 모든 연금 유형이 100세까지 운영되는 것은 아니며 일부 연금제도는 100세 이전에 종료되므로 위의 수식을 연금별 말기 연령에 적용

4) 연금 포트폴리오 구성 및 수익

□ (연금 포트폴리오) 연기금의 총 연금 자산 B_t^P 는 주식 및 채권에 투자되고 연기금의 포트폴리오는 가계 포트폴리오보다 단순한 형태임

- 연금 유형 j 가 보유한 특정 유형 i 인 자산 $A_{i,t}^{P,j}$ 은 총 자산의 외생적인 부분임

$$A_{i,t}^{P,j} = \omega_{i,t}^{P,j} \cdot B_t^{P,j}$$

- 연금의 금융 포트폴리오는 연금 유형(자본, 과세, 비과세)에 독립적임을 가정
 - 따라서 특정 연금 유형 구분이 없으므로 $\omega_{i,t}^{P,j} \equiv \omega_{i,t}^P$ 를 대입하면 위 수식을 $A_{i,t}^{P,j} = \omega_{i,t}^P \cdot B_t^{P,j}$ 로 재작성
 - 연금 자산 수익도 연금 유형에 독립적임(데이터 일치를 위한 조정항은 제외)

- (연금 수익) 연금 수익은 이자율 r_t^P 과 재평가율(revaluation rate) r_t^{RP} 으로 구성

- 연금 이자율은 자산 포트폴리오 내 채권 이자와 배당금의 가중평균으로 구성

$$r_t^{P,j} = \frac{\sum_i r_{i,t} A_{i,t}^{P,j}}{\sum_i A_{i,t}^P} + J_t^{P,r,j} = \underbrace{\frac{\sum_i r_{i,t} \cdot \omega_{i,t}^P}{\sum_i \omega_{i,t}^P}}_{\text{average portfolio interest rate } r_t^P} + J_t^{P,r,j}$$

- 주식의 경우(i =주식) 이자율은 (관찰된)배당률(observed dividend rate)임

$$r_{stocks,t} = \frac{DIV_{stocks,t}}{V_{stocks,t-1}}$$

- 연금 유형별 차이는 조정항(adjustment term) J 에 포함

- 연금 부분의 재평가율도 가중평균의 합으로 구성

$$r_t^{RP,j} = \frac{\sum_i r_{i,t}^{RP} \cdot A_{i,t}^{P,j}}{\sum_i A_{i,t}^{P,j}} + J_t^{P,rev,j} = \underbrace{\frac{\sum_i r_{i,t}^{RP} \cdot \omega_{i,t}^P}{\sum_i \omega_{i,t}^P}}_{\text{average portfolio revaluation rate } r_t^{RP}} + J_t^{P,rev,j}$$

- 주식의 경우 재평가율은 자본이득률(capital gains rate)임

- 이자와 자본이득에 대한 개별 조정항은 평균 비율과 관찰된 비율(observed rate) 사이의 편차임

- 모형에서는 평균 비율을 사용하므로 총 수익에 대한 공동 항(joint term)에 개별적 조정항을 포함

- 연금 자산의 총 수익은 다음과 같음

$$TR_{a,t}^{P,j} = (1 - \tau_t^P)(r_t^P + r_t^{RP}) \cdot B_{a-1,t-1}^{P,j} + J_{a,j,t}^{TRP}$$

- τ_t^P 는 연금 수익에 대한 유효 세율이고 $J_{a,j,t}^{TRP}$ 는 연금 유형 및 연령별 조정항으로서 연령별 수익이 DREAM 데이터와 일치하도록 함
- 이자율 r_t^P 와 재평가율 r_t^{RP} 는 평균 항이고 모든 연금 유형 j 에 대해 동일
 - 연금 수익이 모든 연금 유형에 대해 동일한 이유는 모든 연금 회사가 동일한 포트폴리오를 보유하고 있음을 가정하기 때문
- 연금 유형에 따른 총 수익의 차이는 이자 및 자본이득 객체에 공통적인 조정항 $J_{a,j,t}^{TRP}$ 에 흡수됨
 - 모든 연금 유형 j 에 대해 모든 코호트의 조정항을 합하면 0임

$$\sum_{\{a,j\}} J_{a,j,t}^{TRP} = 0$$

자. 가계의 금융 포트폴리오

- (금융자산) 가계의 예산제약은 다음과 같으며 제약이 없는 가계는 0이 아닌 순 비주택 금융자산이 있음($B \neq 0$)

$$B_{a,t} = (1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} + y_{a,t} - P_t^C c_{a,t} - f(D_{a,t}, D_{a-1,t-1})$$

- 모형은 내생적으로 금융 변수 B 만 생성하나 데이터로는 자산(주식, 채권 및 은행 예금)의 합에서 부채(은행 부채)의 합을 차감하여 구성, 따라서 $B = A - L$ 임
- B 를 자산과 부채로 구분하면 생애주기에 대한 체계적인 패턴을 볼 수 있으며, 본 절에서는 이러한 특성을 모형에 어떻게 포함하고 사용하는지를 설명

1) B 의 함수인 자산과 부채

- (자산 및 부채) 외생적 포트폴리오 구성은 다음 예제를 따라 데이터를 통해 추정
 - 자산 A 와 부채 L 을 순 금융자산 B 와 관계된 식으로 다음과 같이 작성

$$A_{a,t} = I_A + \lambda B_{a,t}$$

$$L_{a,t} = I_L + \phi B_{a,t}$$

- $A_{a,t} - L_{a,t} = B_{a,t}$ 이므로 추정 모수는 $I_L = I_A$ 이며 $\lambda - \phi = 1$ 을 성립해야 함
- 이러한 특성은 OLS 추정 구조에 의해 입증됨

- OLS 회귀식은 $A = X\beta_A + \epsilon_A$, $L = X\beta_L + \epsilon_L$ 이고 A 와 L 은 열(column) 벡터임
- 자산 추정치 $\hat{\beta}_A = (X'X)^{-1}X'A$ 에 $A = B + L$ 을 적용하면 $\hat{\beta}_A = (X'X)^{-1}X'B + \hat{\beta}_L$ 임
- X 행렬은 B 벡터를 포함하므로 OLS는 다음 식을 의미

$$\hat{\beta}_A - \hat{\beta}_L = (X'X)^{-1}X'B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 이러한 속성은 회귀식에 더 많은 설명 변수가 있는 경우로 확장하면 X 행렬이 더 많은 열을 가지며 따라서 OLS(3)를 사용하여 방정식을 추정
- 실적 데이터에 대해 직교 OLS 에러(orthogonal OLS error)를 추정 회귀식에 추가하여 포트폴리오 데이터를 정확하게 구현
- 미래 예측 시뮬레이션의 경우 직교 에러(평균 0값을 가짐)는 제외하고 추정 모수와 내생적인 B 및 X 내부의 기타 내생적인 설명 변수를 사용하여 포트폴리오를 생성

2) 일반적인 구조

- (유형별 자산 및 부채) 여러 자산 유형 i 와 부채 유형 j 에 대해 다음 식을 성립

$$N_a A_a^i = I_a^i + \lambda^i N_a B_a$$

$$N_a L_a^i = I_a^i + \phi^j N_a B_a$$

- 연령 차원을 따라서만 회귀식을 실행하므로 시간 지수는 생략
- I_a^i 와 I_a^j 는 각 연령별 절편 함수(intercept functions)이고, (λ^i, ϕ^j) 는 순 자산과 관련된 모수임
- 회귀식의 변수들을 개별 가계 자산 B_a 대신 코호트 총계($N_a B_a$, etc)로 정의
- 절편항(intercept terms) I_a 는 연령과 보조 변수 Z 의 일반 함수로 다음과 같음

13) 여기서 추정하는 관계가 행동 모델(behavioural model)이 아니기 때문에 OLS는 적절. 이는 DREAM에서와 같이 평균을 사용하는 것보다 데이터에서 관찰된 패턴을 더 정확하게 나타내는 방법임

$$I_a^{i,j} = I_0^{i,j} \left[\frac{B}{n} \right] + I_1^{i,j} \left[\frac{B}{S^a} \right] a + I_z^{i,j} \left[\frac{B}{Z} \right] N_a Z_a$$

- $n = \sum_a 1, S^a = \sum_a a, B = \sum_a N_a B_a, Z = \sum_a N_a Z_a$ 임

- 포트폴리오에 맞도록 여러 가지 Z 변수를 가질 수 있음

- OLS 회귀식 객체 Y 와 X 는 자산 i 에 대해 $Y = [N_a A_a^i]$ 로 주어지며 X 는 4개의 열 (column) 변수와 연령 a 개의 행을 가짐

$$X = \left[\frac{B}{n}, \frac{B}{S^a} a, \frac{B}{Z} N_a Z_a, N_a B_a \right]$$

3) 동질성(Homogeneity)

- (동질성) 절편항이 정의되는 방식은 모형에서 일차 동질성(Homogeneity of degree 1)을 보장하는 역할을 함

- 일차 동질성은 모든 외생 변수를 λ 만큼 증가시킬 때 모형이 동일한 λ 를 갖고 있는 내생 변수들을 산출하여 상대적인 양이 변하지 않을 때 보장됨
- 자산 A^i 에 대한 방정식을 고려하여 모든 연령에 대해 합하면 다음을 얻음

$$A^i = \sum_a I_a^i + \lambda^i B$$

- 절편을 추가하여 식을 다음과 같이 변경

$$A^i = \sum_a \left\{ I_0^i \left[\frac{B}{n} \right] + I_1^i \left[\frac{B}{S^a} \right] a + I_z^i \left[\frac{B}{Z} \right] N_a Z_a \right\} + \lambda^i B$$

- 항을 정리하여 다음과 같이 재작성

$$\frac{A^i}{B} = [I_0^i + I_1^i + I_z^i + \lambda^i] = constant$$

- 포트폴리오 구조는 B 에 대한 개별 자산, 부채의 동질성을 보장하기만 하면 됨
- MAKRO 모형의 나머지 부분은 B 가 다른 모든 변수에 대해 동질성을 가짐을 보장해야 함

4) 한계 수익(Marginal returns)

□ (한계 수익) 포트폴리오 구조하에서 예산제약을 과거 데이터에 맞추어야 함

○ 명시적인(explicit) 자산 및 부채가 존재하는 예산제약은 다음과 같음

$$B_{a,t} = B_{a-1,t-1} + \underbrace{\left[\sum_i r_t^i A^i(B_{a-1,t-1}) - \sum_j r_t^j L^j(B_{a-1,t-1}) \right]}_{\text{Realized Total Return}} + \dots$$

○ 실현된(realized) 자산 수익률은 다음과 같음

$$\underbrace{\left(\sum_i r_t^i I_{a-1,t-1}^i - \sum_j r_t^j I_{a-1,t-1}^j \right)}_{\text{intercept and attached rates}} + \underbrace{\left(\sum_i r_t^i \lambda_{t-1}^i - \sum_j r_t^j \phi_{t-1}^j \right)}_{\text{marginal return on } B} B_{a-1,t-1}$$

- 모수와 절편 함수는 기본 자산과 동일한 방식으로 시간이 지정(timed)되나, 수익률은 한 기 앞서 시간이 지정됨

○ 오일러 방정식에서의 한계율은 다음과 같음

$$R_{a,t}^B = R_t^B = 1 + \bar{r}_t^B = 1 + \left(\sum_i r_t^i \lambda_{t-1}^i - \sum_j r_t^j \phi_{t-1}^j \right)$$

- 모수 ϕ 와 λ 는 연령에 따르지 않으며, 제약이 없는 에이전트의 자산 및 부채 수익률 r_t^i 과 r_t^j 는 연령에 따르지 않으므로 \bar{r}_t^B 도 연령에 따르지 않음

○ 보조 변수가 내생적인 경우 한계율은 다음과 같이 주어짐

$$\bar{r}_t^Z = \frac{B_{t-1}}{Z_{t-1}} \left(\sum_i r_t^i I_{z,t-1}^i - \sum_j r_t^j I_{z,t-1}^j \right)$$

- 이는 주택에 대한 경우이며 은행 부채가 주택 구매와 관련이 있으므로 주택 재고 $D_{a,t}$ (또는 주택 가치 $V_{a,t}^D = P_t^D D_{a,t}$)를 보조 변수 $Z_{a,t}$ 로서 선택

- 포트폴리오는 주택 재고와 관련이 있으므로 주택의 결정은 포트폴리오 구성과 수익에 대한 영향을 통해 저축 의사결정에 영향을 줌

- 가계가 주택 D 와 순 금융자산 B 에 대한 의사결정을 변경하면 포트폴리오는 모형 내에서 데이터가 암시하는 대로 조정됨

· 이 조정은 최적의 포트폴리오 구성이 포트폴리오 구조의 추정 모수 내에 포함되어 있으므로 여전히 외생적임

○ 이외에 추가적인 한계율은 다음과 같음

$$\bar{r}_t^D = \frac{B_{t-1}}{D_{t-1}} \left(\sum_i r_t^i I_{d,t-1}^i - \sum_i r_t^j I_{d,t-1}^j \right)$$

- 자산과 부채 수익률이 동일하지 않는 한 이 값은 일반적으로 0이 아님
- 주택 수량 대신 주택 가치를 사용하여 미분하면 다음과 같음

$$\bar{r}_t^D = \frac{B_{t-1}}{V_{t-1}^D} P_{t-1}^D \left(\sum_i r_t^i I_{d,t-1}^i - \sum_i r_t^j I_{d,t-1}^j \right) \equiv \frac{B_{t-1}}{D_{t-1}} \left(\sum_i r_t^i I_{d,t-1}^i - \sum_i r_t^j I_{d,t-1}^j \right)$$

- 이 한계율은 모기지 부분에 대해서는 모기지 이자 비용이 발생하고, 비모기지 부분에 대해서는 기회비용이 다르므로 주택의 사용자비용을 더 자세하게 나타내는데 도움
- 이 기회비용은 주택 규모가 변할 때 은행 부채에 대한 포트폴리오 가중치 변화도 반영

5) 주택의 사용자비용

□ (주택의 사용자비용) 주택의 사용자비용을 다음의 식으로 표현

$$USER_{a,t} = \underbrace{\left[\frac{\partial f_t}{\partial D_{a,t}} + \frac{1}{R_{a+1,t+1}^B} \frac{\partial f_{t+1}}{\partial D_{a,t}} - \frac{R_{a+1,t+1}^D}{R_{a+1,t+1}^B} \right]}_{\text{User Cost of } D_{a,t} \text{ measured at time } t}$$

○ $R_{a+1,t+1}^B$ 과 $R_{a+1,t+1}^D$ 은 다음과 같으므로 이를 위의 식에 대입하여 재작성

$$R_{a+1,t+1}^B \equiv R_{t+1}^B = 1 + \left(\sum_i r_{t+1}^i \lambda_t^i - \sum_j r_{t+1}^j \phi_t^j \right)$$

$$R_{a+1,t+1}^D \equiv \bar{r}_{t+1}^D = \frac{B_t}{V_t^D} P_t^D \left(\sum_i r_{t+1}^i I_{d,t}^i - \sum_j r_{t+1}^j I_{d,t}^j \right)$$

$$USER_{a,t} = \underbrace{\left[\frac{\partial f_t}{\partial D_{a,t}} + \frac{1}{R_{a+1,t+1}^B} \frac{\partial f_{t+1}}{\partial D_{a,t}} - \frac{B_t}{V_t^D} P_t^D \frac{\left(\sum_i r_t^i I_{d,t}^i - \sum_i r_t^j I_{d,t}^j \right)}{1 + \left(\sum_i r_t^i \lambda^i - \sum_i r_t^j \phi^j \right)} \right]}_{\text{User Cost of } D_{a,t} \text{ measured at time } t}$$

6) 충격 및 데이터

- (충격) 모형에 대한 충격(shock)이 없는 경우 자산이나 부채의 실현(realized) 수익과 기대(expected) 수익은 동일
 - MAKRO는 완전예측 모형이기 때문에 충격이 발생하면 하나의 확률 1 시나리오(probability 1 scenario)에서 다른 확률 1 시나리오로 환경이 변화
 - 충격의 영향이 미치는 기간(impact period)에 국내 주식 수익은 기대 수익과는 다름
 - 실현 수익은 항상 예산제약에 포함되며 기대 수익은(충격이 없는 경우 차익 거래 조건을 따름) 항상 시간 간 1계 조건에 포함

- (데이터) 가계가 100개의 연령 그룹으로 구분되어 있으므로 가계를 캘리브레이션하기 위한 데이터 세트는 연령 그룹별로 데이터가 구분되어야 함¹⁴⁾
 - 전 연령의 자산 프로필의 합계가 국민계정의 총합과 일치해야 함
 - 자산 프로필을 생성하는 데 사용되는 관리 데이터(administrative data)는 덴마크 통계청의 자산 관리 데이터에서 가져오고 일부 추가적인 데이터는 Lovmodel(Law Model, 법률 모형) 데이터베이스¹⁵⁾에서 가져옴
 - 자산에 대한 총계 데이터는 국민계정에서 가져옴
 - 수익은 총계 데이터와 생성된 자산 프로필의 포트폴리오 구성에 기반을 둠
 - 자산 프로필은 두 단계로 생성
 - ① 첫 번째 단계: 관리 데이터와 MAKRO의 자산 구조 간의 대응 관계를 설정
 - MAKRO의 자산 및 부채 유형 대부분은 관리 데이터와 명확하게 일치하며 이는 은행 부채 및 은행 예금, 부동산, 모기지, 채권을 포함
 - MAKRO 주식은 해외 및 국내 주식으로 구분되고, 덴마크 통계청의 자산 데이터는 국내외 합산된 주식 가치에 대한 정보만을 포함
 - 따라서 Lovmodel 데이터베이스의 데이터는 국내외 합산된 주식 가치를 해외 및 국내로 나누는 데 사용

14) Christian P. Hoeck, *The creation of lifecycle profiles for households in MAKRO*, 2020을 참고

15) Lovmodel 데이터베이스는 전체 인구의 33% 표본을 기반으로 한 다년 모델 인구임. 1. 개인정보(나이, 성별, 가구, 학력 등), 2. 일, 소득 및 자산, 3. 부동산 및 주거 조건, 4. 노동시장과의 연결, 5. 사회적 혜택 등을 포함

- ② 두 번째 단계: 자산 및 부채 프로파일은 국민계정의 총 가치와 일치하도록 비례적으로 조정됨
- 수익률은 국민계정의 총 가치를 기준으로 계산됨
 - 수익률과 생성된 자산 및 부채 연령 프로필을 결합하면 총 수익에 대한 연령 프로필이 생성됨

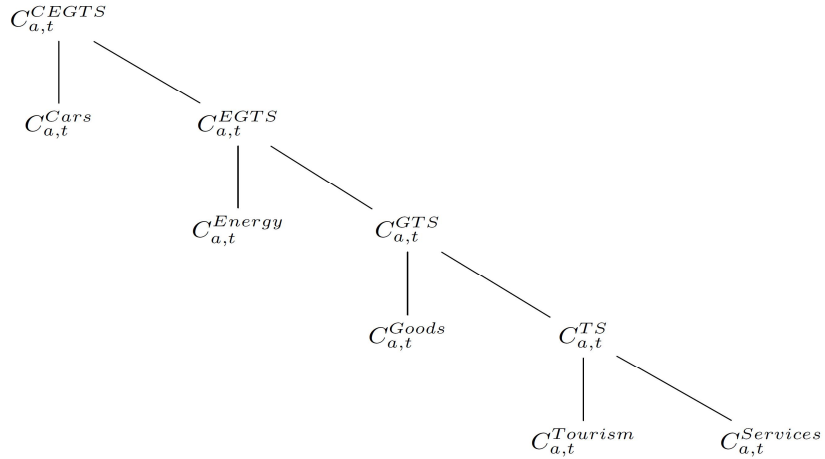
차. 소비 구성 요소

- (소비 구성 요소) 가계 효용함수의 가장 윗 단계에는 소유 주택과 비주택 소비 총계인 두 재화가 존재
 - 소유 주택은 하위 구성 요소가 없는 단일 재화인 반면 비주택 소비는 CES 나무 구조(CES tree structure)를 통해 많은 요소들이 합쳐짐
 - 임대주택은 CES 나무 요소가 아니라 가계의 예산제약이라는 외생적인 요소임
 - 총 소비, 저축, 및 주택의 최적화 결정은 II.1.가~나 절에 설명되어 있고 이번 절에서는 총 비주택 소비 $C_{a,t}$ 구성 요소의 결정에 대해 자세히 설명
 - 첫 번째 구성 요소(decomposition)는 나무의 윗부분(upper part of the tree)을 이루는 5가지 서로 다른 재화에 해당
 - 5가지 소비 재화에 대한 가계 수요는 9가지 국내 제조 부문의 산출물과 수입재에 대한 총수요의 일부이며 이 과정은 투입산출 체계 절(II.9)에서 설명함

1) 상위 나무(Upper tree)

- (상위 나무) 효용함수 내 다양한 유형의 소비가 다음의 CES 중첩(nest) 구조에서 나타나며 t 기에 연령 a 인 에이전트의 비내구재 소비는 $C_{a,t} \equiv C_{a,t}^{CEGTS}$ 로 주어짐

[그림 II-1] 상위 나무(Upper tree)

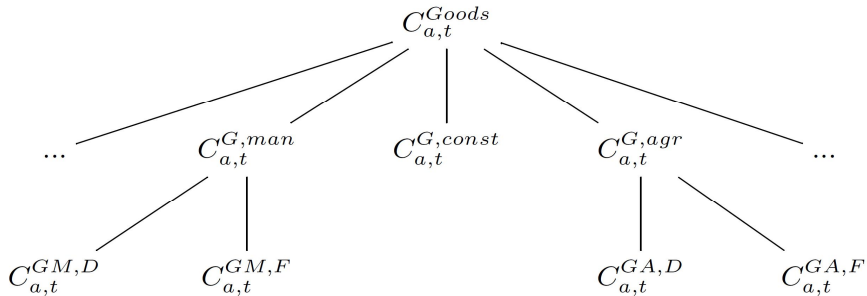


출처: DREAM(2021), p. 32.

2) 하위 나무(Lower tree)

- (하위 나무 구성 요소) 각 가지(branch) 끝에 특정 소비가 존재하며 이는 국내외에서 제조될 수 있고, 여러 부문의 산출물이 합해질 수 있으므로 복잡한 객체임
- 소비 구성 요소 중 다중부문(multisectoral) 구성은 모형의 9가지 생산(8개의 민간 부문과 하나의 공공 부문) 구분에 따른 결과이며 이들은 5가지 소비 구성 요소에 할당됨
- 하위 나무는 레벨1(윗부분)에서 9개의 생산 부문을 5개의 소비재로 할당하고 레벨2(아랫부분)에서는 국내 재화와 수입재로 구분하는 순서(sequence)로 구성
 - 다음 그림은 $C_{a,t}^{Goods}$ 의 하위 나무 레벨 1이 제조, 건설 및 농업으로 이루어지는 가상의 예임

[그림 II-2] 하위 나무(Lower tree)



출처: DREAM(2021), p. 33.

- 모든 구성 요소에 모든 가지가 있는 것은 아니지만 다섯 가지 모든 소비 구성 요소는 동일한 하위 나무를 가짐
 - 예를 들어 '자동차'는 생산 측면에서 대부분 제조와 서비스로 구성

3) CES 최적화

- (CES 최적화) CES 비용 최소화 방법은 생산 관련 절에서 자세하게 설명되어 있으며 본 절에서 설명하는 CES 비용 최소화 문제는 이와 동일하나 보다 간단함
- 본 절에서는 소비량을 늘리는 기술 진보나 다양한 활용(variable utilization)과 같은 추가적인 요소가 없으므로 간단함
- 소비 나무의 모든 레벨에서 비용 최소화 문제는 다음과 같이 요약

$$\text{효용(Utility)} \quad \rightarrow \quad C^{ij} = \left[(\mu^i)^{\frac{1}{\eta}} (C^i)^{\frac{\eta-1}{\eta}} + (\mu^j)^{\frac{1}{\eta}} (C^j)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}}$$

$$\text{미분(Derivative)} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial C^{ij}}{\partial C^i} = \left(\mu^i \frac{C^{ij}}{C^i} \right)^{\frac{1}{\eta}}$$

$$\text{수요/1계조건 (Demand/F.O.C)} \quad \rightarrow \quad C^i = \mu^i C^{ij} \left(\frac{P^{ij}}{p^i} \right)^{\eta}$$

$$\text{제약(Constraint)} \quad \rightarrow \quad P^{ij} C^{ij} = p^i C^i + p^j C^j$$

$$\text{CES 가격 (CES price)} \quad \rightarrow \quad P^{ij} = \left[\mu^i (p^i)^{1-\eta} + \mu^j (p^j)^{1-\eta} \right]^{\frac{1}{1-\eta}}$$

- μ 는 척도 모수(scale parameters)이고 η 는 탄력성임

4) 코드 내 상위 나무(upper tree in the code)

- (코드 내 상위 나무 특성) CES 비용 최소화 문제의 시퀀스(sequence)는 GAMS¹⁶⁾에 지능형 지수화(intelligent indexing)를 통해 간결한 방식으로 나타남

16) GAMS(General Algebraic Modeling System)는 수학적 최적화를 위한 고급 모델링 시스템임. GAMS는 선형, 비선형 및 혼합 정수 최적화 문제를 모델링하고 해결하도록 설계됨. 이 시스템은 복잡한 대규모 모델링 응용 프로그램에 맞게 조정되었으며 사용자가 새로운 상황에 적응할 수 있는 유지 관리 가능한 대규모 모델을 구축할 수 있도록 함

- 모든 1계 조건에 대한 하나의 표현식과 모든 제약에 대한 하나의 표현식을 결합한 단일 명령으로 나무의 상위 부분 전체 문제를 풀 수 있음
- 소비재를 코드 내에 다음과 같이 변수화하여 입력했으며 총 6개 변수를 인덱스 세트 (index set) c 에 포함
 - 5가지 소비재를 각각 자동차 $cBil$, 에너지 $cEne$, 재화 $cVar$, 관광 $cTur$, 서비스 $cTje$ 로 변수화
 - 주택은 소비 나무에 포함되어 있지 않으나 $cBol$ 로 변수화
- 코드상에서 CES 나무는 연령에 연동되지 않음
 - 연령에 따라 효용 가중치가 동일한 것으로 가정함에 따라 모든 코호트는 동일한 비주택 소비 구성을 가짐
 - 따라서 나무 문제에서 총 소비는 $C_t = \sum_a C_{a,t} N_{a,t}$ 로 표현이 가능

□ (상위 나무 문제) 코드 내 상위 나무 문제는 다음과 같이 표현할 수 있음

$$p_{cNest,t}^C q_{cNest,t}^C = \sum_{\{c_{--}\}} q_{c_{--},t}^C p_{c_{--},t}^C$$

$$q_{c_{--},t}^C = u_{c_{--},t}^C q_{cNest,t}^C \left(\frac{p_{cNest,t}^C}{p_{c_{--},t}^C} \right)^{e_{cNest}^C}$$

- $q_{cNest,t}^C$ 는 문제가 어느 방정식 세트에서 풀리는지에 따라 상위 나무 그림의 중첩 (nest) 객체 $C_{a,t}^{CEGTS}$, $C_{a,t}^{EGTS}$, $C_{a,t}^{GTS}$, $C_{a,t}^{TS}$ 중 하나에 해당
- 두 식에 있는 등호는 $cNest2c_{--}[cNest,c_{--}]$ 매핑에 의해 통제됨
 - 이 매핑은 나무의 오른쪽 가지가 오른쪽 몸통(trunk)에 할당되는 것을 보장함
 - $cNest$ 와 c_{--} 세트의 간단한 연결 관계는 전체 상위 나무를 포함하도록 설계
 - $cNest$ 세트는 소비 나무에 있는 모든 상위 중첩 세트¹⁷⁾임
 - c_{--} 세트는 c 세트와 $cNest$ 세트의 모든 구성 요소를 포함
 - $u_{c_{--},t}^C$ 는 척도 모수(효용 가중치는 μ)이며 e_{cNest}^C 는 탄력성(η)임

17) 코드 내에서는 $cNest = \{cX, cTurTje VarEne, cTurTje Var, cTurTje\}$ 이고 cX 는 총 비내구재 소비를 나타냄

- <표 II-1>은 여러 소비재에 대한 탄력성 값과 각 재화에 대한 예산 비율을 나타냄
 - 척도 모수는 데이터 실적 기간(2018년 이전)에 대해서는 예산 비율을 따르고 전망 기간(2018년 이후)에 대해서는 ARIMA 추정치¹⁸⁾로 주어짐

<표 II-1> 상위 나무 탄력성(η)과 예산 비율

	η	Budget Share 2010, 2017	
C and Housing	0.3	Cars	0.032 0.035
Cars → Nest	0.2	Energy	0.091 0.074
Energy → Nest	0.0	Goods	0.310 0.295
Goods → Nest	0.7	Services	0.325 0.342
Services and Tourism	1.1	Tourism	0.040 0.041
		Housing	0.202 0.213

Overall utility intertemporal elasticity of substitution is 1.
 Budget shares are given by $S_i = p_i \times q_i / \sum_j (p_j \times q_j)$.

주: 1. 전체 효용의 시간 간 대체탄력성은 1임

2. 예산 비율은 $S_i = p_i \times q_i / \sum_j (p_j \times q_j)$ 로 주어짐

출처: DREAM(2021), p. 39.

5) 코드 내 하위 나무(Lower tree in the code)

- (코드 내 하위 나무 특성) 하위 나무는 모든 총 합계가 모이고 시장청산 조건이 정의되는 투입산출 체계 절에서 중요 객체임
- 나무의 하위 두 레벨을 수요 객체로서 포함하는 대신, 최종 소비재를 생산하기 위해 국내외 제조원(production sources)으로부터 투입물을 가져오는 포장 중간단계(packaging intermediary)로 간주
- 몇 가지 가정을 통해 가계 문제로부터 하위 나무의 개념적 분리를 용이하게 함
- 첫째, 나무(상위 나무도 포함)는 모든 연령에 동일함
 - 연령 지수 없이 전 연령에 대해 합한 수요를 직접 작업할 수 있음을 의미
 - 둘째, 나무의 모든 최적화 문제는 영 이윤(zero profit)을 따름
 - 예를 들어 가계 문제에서 상위 나무로부터의 자동차에 대한 수요를(소비자 행동

18) Anders F. Kronborg and Christian S. Kastруп, *Estimering af Forbrugssystemet i MAKRO*, 2020. 3. 참고

으로 보기보다는) 하위 나무 구조 원리를 이용하여 생산 부문으로부터 산출물에 대한 수요에 할당할 수 있음을 의미

□ (하위 나무 레벨1 - 민간 제조원) 하위 나무 레벨1에서는 9개의 생산 부문으로부터 5개의 소비재를 제조

- 제조 시 모든 소비재에 대해 각각 고정된 비율을 할당
 - 이는 레온티에프 수요(Leontief demand)를 갖는 것과 동일하며 ADAM¹⁹⁾ 및 SMEC²⁰⁾ 모형에서 사용된 것과 동일한 구조임
- 하위 나무 레벨1에 레온티에프 할당(Leontief assignment)이 존재하므로 하위 나무를 소비자 행동보다는 기술로서 생각할 수 있음
 - 소비재 간의 대체할 수 없는 절대적 불가능보다는 경직성이 있는 기술로 간주하는 것이 더 쉬움
- 모수의 경우 대체탄력성(0)을 갖지 않으므로 고정된 비율(척도 모수)만 존재
- <표 II-2>의 2017년 데이터에서 하위 나무 레벨1의 자동차의 경우 제조(약 71%) 및 서비스(약 29%)를 사용하므로 대략적으로 다음을 가짐

$$C_t^{Cars} = \min\left(\frac{C_t^{Cars, man}}{\mu_{cars}^{man}}, \frac{C_t^{Cars, serv}}{\mu_{cars}^{serv}}\right) = \min\left(\frac{C_t^{Cars, man}}{0.71}, \frac{C_t^{Cars, serv}}{0.29}\right)$$

- 이는 다음과 동일함

$$C_t^{Cars, man} = \mu_{cars}^{man} C_t^{Cars}$$

$$C_t^{Cars, serv} = \mu_{cars}^{serv} C_t^{Cars}$$

· 일반적으로 $1 = \mu_{cars}^{serv} + \mu_{cars}^{man}$ 임

- <표 II-2>의 2017년 데이터에 따르면 에너지 재화의 소비는 주로 생산재 에너지 ($\mu_{Energy}^{Ene} = 0.82$), 서비스($\mu_{Energy}^{Serv} = 0.16$) 및 제조($\mu_{Energy}^{Man} = 0.02$)를 사용

19) ADAM(Annual Danish Aggregate Model)은 덴마크 통계청의 거시경제 모델링 부서에서 개발한 거시경제 모델임. 이 모델은 덴마크 경제 상호작용에 대한 간단한 수학적 설명을 제공. 모델이 실증 기반을 두고 있고 대부분의 행동 방정식이 국민계정 데이터에서 추정되는 점이 중요

20) SMEC(Simulation Model of the Economic Council)은 덴마크 경제를 설명하는 거시경제학 모델로서 덴마크 경제 위원회가 예측 및 정책 분석을 수행할 때 사용

$$C_t^{Energy} = \min\left(\frac{C_t^{Energy, Ene}}{\mu_{Energy}^{Ene}}, \frac{C_t^{Energy, Serv}}{\mu_{Energy}^{Serv}}, \frac{C_t^{Energy, man}}{\mu_{Energy}^{man}}\right)$$

- 이를 코드상에서는 다음과 같이 작성

$$\frac{v_{j,s,t}^{IO}}{IO} = u_{j,s,t}^{IO} q_{j,t}^{J_j}, \quad j = \{r, c, k\}, \quad J_j = \{R, C, I\}$$

- 여기서 $v_{j,s,t}^{IO} = p_{j,s,t}^{IO} q_{j,t}^{IO}$ 이며 상위 지수 $J_r = R, J_c = C, J_k = I$ 임
- 이 시스템은 중간재(r, R)과 투자재(k, I)에 대한 기업의 수요에 적용되므로 이러한 모든 하위 나무 구성은 코드 내 하나의 방정식에 포함됨

- 이 예제에서 에너지 소비에 대한 생산 서비스의 기여도는 다음과 같이 작성

$$\mu_{Energy}^{Serv} = u_{Energy, Services, t}^{IO} = 0.16$$

□ (하위 나무 레벨1 - 공공 생산 제조) 위의 레온티에프 구조는 공공 재화/서비스에 대한 민간 수요에 적용되지 않음

- 이 특정 공공 생산 구성 요소가 5가지 소비재 중 어느 하나에 존재하는 경우 다음 예제의 방법으로 외생화됨
- 소비재가 서비스(services)의 경우 $C_t^{Services} \equiv N_{a,t} C_{a,t}^{Services}$ 에서 공공 부문에서 제공되는 서비스 $C_t^{ServByGov}$ 를 제거하여 순 서비스를 계산

- 순 서비스 $C_t^{Services} - C_t^{ServByGov} = C_t^{NetS}$ 에 <표 II-2>의 2017년 데이터를 사용해서 레온티에프 구조를 적용

$$\begin{aligned} C_t^{NetS} &= (1 - \mu_{Serv}^{Pub}) \min\left(\frac{C_t^{NetS, man}}{\mu_{Serv}^{man}}, \frac{C_t^{NetS, serv}}{\mu_{Serv}^{serv}}, \frac{C_t^{NetS, sea}}{\mu_{Serv}^{sea}}\right) \\ &= 0.84 \times \min\left(\frac{C_t^{NetS, man}}{0.02}, \frac{C_t^{NetS, serv}}{0.81}, \frac{C_t^{NetS, sea}}{0.01}\right) \end{aligned}$$

- 이 단계에서는 계수의 합이 1이 될 것을 예상하고 순 서비스(공공 투입물 0.16을 제외) 비율을 정확하게 채움

$$\frac{0.02}{0.84} + \frac{0.81}{0.84} + \frac{0.01}{0.84} = 1$$

- 다만, 요소들의 합이 1에 아주 가까움에도 불구하고 정확하게 맞지는 않음

○ ‘레온티에프 산출물(Leontief Output)’의 가격은 다음과 같이 주어짐

$$P_t^{NetS} C_t^{NetS} = P_t^{man} C_t^{NetS,man} + P_t^{serv} C_t^{NetS,serv} + P_t^{sea} C_t^{NetS,sea}$$

- 예제에서 위 수식을 대체하면 다음을 얻음

$$P_t^{NetS} = P_t^{man} \frac{0.02}{0.84} + P_t^{serv} \frac{0.81}{0.84} + P_t^{sea} \frac{0.01}{0.84}$$

- 레온티에프 산출물 가격 P_t^{NetS} 는 μ 의 합이 정확히 1이 아니더라도 가격과 계수가 주어지면 결정됨

□ (<표 II-2> 설명) 하위 나무 레벨 1에서의 레온티에프 비율 계수(proportionality factors)를 보여줌

○ 전체 소비 수요에서 공공재의 수요 모수(비율)를 제외하면 40개(8×5)의 레온티에프 $\mu_{Consumption}^{Production}$ 모수가 존재

○ 공공 생산 비율은 오직 서비스에만 영향을 미침

- 첫 번째 열 ‘Pub’에 서비스와 관련된 행만 양(+)의 값을 가짐을 확인

○ 표의 빈 칸은 해당 행의 소비재가 해당 열의 생산 부문 구성 요소를 포함하지 않음을 의미

<표 II-2> 하위 나무 레벨 1. 레온티에프 계수 μ^{row}

		Production Sectors, 2000 Data							
	Pub	Man	Agr	Ser	Ext	Con	Sea	Hou	Ene
Cars		0.58		0.42					
Energy		*	*	0.14					0.86
Goods		0.46	0.01	0.53	*	*	*	*	*
Services	0.18	0.01	*	0.80	*	*	0.01	*	*
Tourism				1.00					
		Production Sectors, 2017 Data							
	Pub	Man	Agr	Ser	Ext	Con	Sea	Hou	Ene
Cars		0.71		0.29					
Energy		0.02	*	0.16					0.82
Goods		0.43	0.01	0.56	*		*	*	*
Services	0.16	0.02	*	0.81	*	*	0.01	*	*
Tourism				1.00					

2000 and 2017 data. Rowsum = 1 (almost exactly). μ coefficients \approx budget shares. Empty cells => no input. Cells = * => Negligible input.

주: 1. 2000년, 2017년 데이터임. 행의 합은 1(거의 가까움)이고, μ 계수는 예산 비율과 유사함

2. 빈칸은 입력값이 없음을 나타내고 *는 값이 유의미하지 않음을 의미

출처: DREAM(2021), p. 39.

□ (하위 나무 레벨2) 레벨2에서는 국내(dom) 및 해외(for) 제조원에서 소비재 생산 부문의 하위 구성 요소를 이루며 이에 대해 표준적 CES 구성 요소를 사용

○ 자동차의 제조 $C_t^{Cars,man}$ 의 하위 구성 요소는 CES 1계 조건에 의해 국내 제조원 수요 $C_t^{Cars,man,dorm}$ 와 해외 제조원 수요 $C_t^{Cars,man,for}$ 로 구분

$$C_t^{Cars,man,dorm} = \mu_{cars,t}^{man,dorm} C_t^{Cars,man} \left(\frac{P_{man,t}^{dom}}{P_{cars,man,t}^{CES(dom,for)}} \right)^{-\eta_{cars}^{man}}$$

$$C_t^{Cars,man,for} = \mu_{cars,t}^{man,for} C_t^{Cars,man} \left(\frac{P_{man,t}^{for}}{P_{cars,man,t}^{CES(dom,for)}} \right)^{-\eta_{cars}^{man}}$$

- $\mu_{cars,t}^{man,dorm}$ 와 $\mu_{cars,t}^{man,for}$ 는 척도 모수이며 η_{cars}^{man} 는 탄력성임

- 탄력성은 DREAM 모형에서 차용한 1.25로 설정되어 있으며 나무의 모든 가지에 동일하게 적용

○ CES 가격은 표준적 영 이윤(zero profit) 최적화 문제를 풀며 다음과 같이 작성

$$P_{cars,man,t}^{CES(dom,for)} = \left\{ \mu_{cars,t}^{man,for} (P_{man,t}^{for})^{1-\eta_{cars}^{man}} + \mu_{cars,t}^{man,dorm} (P_{man,t}^{dom})^{1-\eta_{cars}^{man}} \right\}^{\frac{1}{1-\eta_{cars}^{man}}}$$

- 가격과 탄력성이 주어지면 수요를 할당하는 주요 모수는 척도 모수 $\mu_{demand,t}^{Production, dom}$ 와 $\mu_{demand,t}^{Production, for}$ 임

□ (<표 II-3> 설명) <표 II-3>은 하위 나무 레벨 2의 탄력성과 외국 비율을 나타냄

○ <표 II-3>의 빈 칸은 해당하는 행의 소비재가 해당 열에서 생산 부문의 구성 요소를 포함하지 않음을 의미

○ D가 있는 칸은 해당 부문에서 생산되지만 국내 생산만 의미하며 따라서 해당 열의 외국 비율은 0이 됨

○ F가 있는 칸은 해당 부문에서 해당 소비재로의 해외 공급만 있음을 의미함. 따라서 해당 열의 외국 비율은 1이 됨

〈표 II-3〉 하위 나무 레벨 2. 탄력성 η 및 외국 비율 S_f

		Production Sectors, 2017 Data								
		Pub	Man	Agr	Ser	Ext	Con	Sea	Hou	Ene
Cars	η		F		1.25					
	S_f		1		0.35					
Energy	η		1.25		1.25					1.25
	S_f		0.12		0.11					0.24
Goods	η		1.25	1.25	1.25					
	S_f		0.33	0.34	0.27					
Services	η	D	1.25		1.25			1.25		
	S_f	0	0.24		0.3			0.21		
Tourism	η				D					
	S_f				0					

Elasticities between foreign (f) and domestic (d) production. Tables entries are conditional on positive demand from the respective production sector. The foreign share is given by $S_f = p_f \times q_f / (p_f \times q_f + p_d \times q_d)$.

주: 1. 외국(f)과 국내(d) 제조 사이의 탄력성을 나타내며 표 항목은 각 생산 부문의 양(+)의 수요에 따라 결정됨

2. 외국 비율은 $S_f = p_f \times q_f / (p_f \times q_f + p_d \times q_d)$ 로 주어짐

출처: DREAM(2021), p. 40.

6) 관광(Tourism)

□ (수입 및 수출) 관광에는 수입과 수출이 존재

○ 수입은 덴마크의 가계가 해외에서 소비하는 금액으로 구성되며 소비 나무에서 $C_{cTur',t}$ 로 주어짐

- 보통의 소비재이며 이 수요는 소득에 따라 증가

○ 수출은 외국 부문(II-5. 수출)에서 결정되고 그 총량은 $X'_{xTurx',t}$ 로 주어짐

- 덴마크 내 외국인들의 총 소비는 외국 부문 절(II-5. 수출)에서 소비 그룹으로 구분되며 $C_{c,t}^{Tourist}$ 로 주어짐

□ (소비 가치) 소비 그룹의 가치 $P_{c,t}^C C_{c,t}$ 는 덴마크 가계의 총 소비 가치 $P_{c,t}^{CHH} C_{c,t}^{CHH}$ 와 관광객의 총 소비 가치 $P_{c,t}^{CTourist} C_{c,t}^{CTourist}$ 를 합한 값임

$$P_{c,t}^C C_{c,t} = P_{c,t}^{CHH} C_{c,t}^{CHH} + P_{c,t}^{CTourist} C_{c,t}^{CTourist}$$

- 모형에서 덴마크인과 관광객은 동일한 상품에 대해 동일한 가격을 직면하지만 데이터와 일치시키기 위해서는 동일한 가격을 설정할 수 없음

- 이에 따라 데이터를 맞추기 위한 모수로서 조정계수 $\lambda_{c,t}^{pCTourist}$ 를 도입

$$P_{c,t}^{CTourist} = \lambda_{c,t}^{pCTourist} P_{c,t}^{CHH}$$

- 덴마크의 총 소비 가치는 덴마크 내 외국인 관광객의 소비를 포함하지 않음

$$P_{tot',t}^C C_{tot',t} = \sum_c (P_{c,t}^C C_{c,t} - P_{c,t}^{CTourist} C_{c,t}^{Tourist})$$

- 이는 $P_{tot',t}^C C_{tot',t} = P_{tot',t}^{CHH} C_{tot',t}^{HH}$ 를 함의

- 두 객체의 양은 거의 동일하나 $C_{tot',t}^{HH}$ 는 CES 합이고 $C_{tot',t}$ 는 체인 합(chain aggregate)이므로 작은 차이는 존재하며 다음과 같음

$$P_{tot',t-1}^C C_{tot',t} = \sum_c (P_{c,t-1}^C C_{c,t} - P_{c,t-1}^{CTourist} C_{c,t}^{Tourist})$$

카. 부록

1) 유산 할당행렬 계산

- 유산은 외생적이고 가계의 소득 변수 내에 포함되므로 가계의 예산제약에 더해짐
 - 반면, 에이전트가 경제 생활을 시작할 무렵인 18살에 유산을 받는다면, 상속받은 유산은 외생적이므로 자산 $B_{0,t}$ 에 포함되지 않음
- 개인 a_h 는 사망한 에이전트 a_d 로부터 유산을 상속받음
 - 유산의 분포는 시변행렬(time-varying matrix) $M_t(a_d, a_h)$ 로 표기함
 - a_d 와 a_h 는 각각 사망자의 연령과 상속인의 연령을 나타냄
 - a_d 로부터 상속되는 유산은 a_h 연령의 모든 에이전트들에게 동등하게 분배됨
 - 부모나 조부모 등 모든 피상속인의 사망 이외 모든 사망을 포함하며, 자녀도 사망하면 부모나 형제에게 자산을 남김
- 유산 $M_t(a_d, a_h)$ 는 덴마크 행정 데이터를 기반으로 한 개인 유산 추정치이며, 이중차분법(DID, difference in difference)을 사용하여 추정함

- 피상속인 a_d 의 사망으로 남겨진 재산과 상속인 a_h 연령의 평균 재산 차이를 측정하여 상속되는 유산을 추정함
- 색인 i 는 상속되는 특정 유산을 나타내며, $\tilde{H}_{a_d, a_h, i, t}$ 는 상속된 유산의 명목 추정량임
 - 유산의 명목 추정량은 상속되는 유산을 모든 a_d 와 a_h 의 연령 그룹에 대해 합한 뒤 총인구로 나누며, 총인구는 유산 상속과 관련되지 않은 모든 개인도 포함
- 유산에 대한 평균은 $H_{a_d, a_h, t}$ 이며 $N_{x, t}$ 는 연령 그룹 x 의 인구수임
 - 연령 그룹은 0세부터 100세이며 기간은 2000년부터 2012년까지임

$$H_{a_d, a_h, t} = \frac{1}{N_{a_h, t} N_{a_d, t}} \left[\underbrace{\sum_i \tilde{H}_{a_d, a_h, i, t}}_{\text{All transfers } a_d \text{ to } a_h} \right]$$

$$H_{a_d, t} = \sum_{a_h} H_{a_d, a_h, t} N_{a_h, t} = \frac{1}{N_{a_d, t}} \left[\underbrace{\sum_{a_h} \left(\sum_i \tilde{H}_{a_d, a_h, i, t} \right)}_{\text{All transfers } a_d \text{ to } a_h} \right]$$

- 피상속인 a_d 와 상속인 a_h 의 연령을 종속변수로 하는 로컬 선형회귀분석(a local linear regression)과 가우시안 커널(Gaussian kernel)을 사용하여 비모수추정(non-parametric estimation)을 수행함
 - a_d 로부터 상속받는 a_h 의 유산에 대한 묶인 $\tilde{\chi}_{a_d, a_h}$ 는 χ_{a_d, a_h} 의 적합값(fitted value)으로 대체됨

$$\tilde{\chi}_{a_d, a_h} = \frac{H_{a_d, a_h}}{H_{a_d}}$$

- χ_{a_d, a_h} 는 시불변(time-invariant) 변수이므로, $\chi_{a_d, a_h} N_{a_h, t}$ 의 총합은 1이 되지 않음
 - 이는 상속 비용, 세금 및 이자로 인해 상속되는 유산과 받는 유산이 같지 않음을 의미함
 - 상속되는 금액과 받는 금액이 동일하도록 정규화하여 할당행렬을 얻음

$$M_t(a_d, a_h) = \frac{\chi_{a_d, a_h}}{\sum_{a_h} \chi_{a_d, a_h} N_{a_h, t}}$$

$$\sum_{a_h} M_t(a_d, a_h) N_{a_h, t} = \frac{\sum_{a_h} \chi_{a_d, a_h} N_{a_h, t}}{\sum_{a_h} \chi_{a_d, a_h} N_{a_h, t}} = 1$$

□ a_d 가 남긴 유산 총액은 사망기간 말 상속되기 전, 순자산 $B_{a_d,t}$ 와 주택으로 구성되지만 여기서는 순 금융자산인 B 만 가정하여 설명함

○ a_d 가 남긴 유산평균은 $(1 - s_{a_d,t})B_{a_d,t}$ 이며 $s_{a_d,t}$ 는 a_d 연령대 중 사망하지 않은 사람의 비율임

- 즉, $s_{a_d,t}$ 는 a_d 가 $a_d + 1$ 에도 살아 있을 확률임

$$H_t = \sum_{a_d} (1 - s_{a_d,t}) B_{a_d,t} N_{a_d,t}$$

○ t 기 말에 상속되는 유산은 다음 연도에 상속받으며 식은 아래와 같음

- a_h 는 $t-1$ 기 말에 a_d 가 사망하여 남긴 유산을 t 기에 받게 됨

$$(1 - s_{a_d,t-1}) B_{a_d,t-1} M_t(a_d, a_h)$$

- a_h 가 t 기에 받게 되는 유산은 아래와 같음

$$H_{a_h,t} = \sum_{a_d} (1 - s_{a_d,t-1}) B_{a_d,t-1} M_t(a_d, a_h) N_{a_d,t-1}$$

○ 결과적으로 $t-1$ 기에 주어진 유산과 t 기에 받은 유산은 동일하며, a_h 가 받게 되는 총 유산에 대한 식은 아래와 같음

$$\begin{aligned} \sum_{a_h} H_{a_h,t} N_{a_h,t} &= \sum_{a_h} \left(\sum_{a_d} (1 - s_{a_d,t-1}) B_{a_d,t-1} M_t(a_d, a_h) N_{a_d,t-1} \right) N_{a_h,t} \\ &= \sum_{a_h} \left(\sum_{a_d} (1 - s_{a_d,t-1}) B_{a_d,t-1} \frac{\chi_{a_d, a_h}}{\sum_{a_h} \chi_{a_d, a_h} N_{a_h,t}} N_{a_h,t-1} \right) N_{a_h,t} \\ &= \sum_{a_d} (1 - s_{a_d,t-1}) B_{a_d,t-1} \left(\sum_{a_h} \frac{\chi_{a_d, a_h} N_{a_h,t}}{\sum_{a_h} \chi_{a_d, a_h} N_{a_h,t}} \right) N_{a_d,t-1} \\ &= \sum_{a_d} (1 - s_{a_d,t-1}) B_{a_d,t-1} N_{a_d,t-1} = H_{t-1} \end{aligned}$$

2) 토지와 주택의 감가상각

□ 에이전트가 소유한 주택 $D_{a,t}$ 는 토지와 자재로 구성되며, 이는 모든 가계에 동일하다고 가정하여 모형을 단순화함

- 감가상각은 주택의 구성 요소 중 자재에만 적용되며 주택 매도 시 자재와 토지가 결합하여 매도됨
- 일반적 운동법칙에서 주택 매도 시 판매되는 토지는 손실된 것으로 간주한 뒤, 이를 가계 수익으로 회수함

$$z_{a,t} = D_{a,t} - (1 - \delta_t^{bricks})D_{a-1,t-1}$$

□ 매 기간마다 새로운 토지가 경제에 방출됨

- 토지 변수의 총합은 외생적으로 증가하며, 증가한 토지 분에 대해서는 개인이 보유한 토지에 비례하여 모든 가계에 배분함
 - 토지 매도를 통한 수익을 정산하기 전에 총 토지 대비 개인의 토지 보유량을 결정해야 함
- 비계약 에이전트는 총 토지에서 다음의 비율만큼 소유함

$$\left(\frac{D_{a-1,t-1}^{unc} \times (1 - \Upsilon) N_{a-1,t-1}}{\sum_a (\Upsilon D_{a-1,t-1}^{cons} + (1 - \Upsilon) D_{a-1,t-1}^{unc}) N_{a-1,t-1}} \right) \frac{1}{(1 - \Upsilon) N_{a-1,t-1}}$$

- 대괄호 식은 코호트가 보유한 총 토지 대비 비율을 나타내며, 두 번째 항의 분모는 코호트의 크기임
- 두 항의 곱은 개인의 토지 보유 비율을 산출한 것임

$$D_{a-1,t-1}^{unc} \left(\frac{1}{\sum_a (\Upsilon D_{a-1,t-1}^{cons} + (1 - \Upsilon) D_{a-1,t-1}^{unc}) N_{a-1,t-1}} \right) \equiv D_{a-1,t-1}^{unc} \Omega_t^{Land}$$

- 계약된 에이전트의 총토지 보유량에 대한 추론은 비계약 에이전트와 동일하며 객체 $D_{a-1,t-1}^{cons} \Omega_t^{Land}$ 만큼 보유함

□ 토지 매도 수익에 대하여, 매도되는 토지 총량은 주택의 감가상각으로 인한 토지와 외생적으로 생겨나 가계에 지급되는 토지의 합임

$$Land_t^{Sales} = \delta_t^{bricks} Land_{t-1} + Land_t + Land_{t-1}$$

- 토지를 매도하여 얻은 개별 수익은 다음 식과 같음

$$D_{a-1,t-1} \Omega_t^{Land} P_t^{Land} Land_t^{Sale}$$

- 이 수익은 α_t^{Land} 객체로 정의되어 모형에 적용되며, 이 객체에서 토지의 종류와 연식은 모두 동일하다고 가정함

$$\alpha_t^{Land} = \frac{\Omega_t^{Land} P_t^{Land} Land_t^{Sales}}{P_{t-1}^D}$$

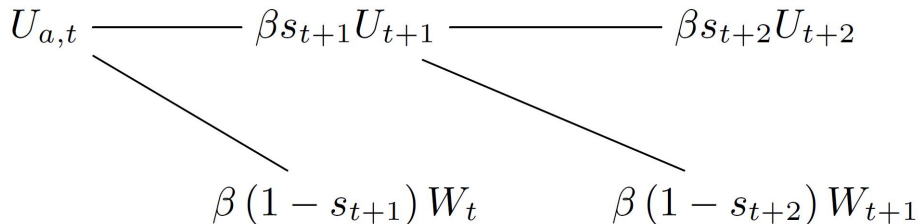
- 주택의 감가상각은 내생적이며 유지 보수할 시 주택의 수명은 연장되고, 유지보수에 대한 투자는 주택 건설이나 배관공, 목수 같은 중소 서비스 업체로부터의 구매에 해당됨

$$D_{a,t} = (1 - \delta_t + \hat{\delta}(y_t^m)) D_{a-1,t-1} + z_{a,t}$$

3) 효용함수, 경직성, 기준 소비

- (효용) 비제약 가구는 현재 할인된 효용 가치의 흐름을 최대화하며, 시퀀스는 도중에 이탈 (death)할 가능성을 설명함
- 소비의 효용 U 와 유산의 효용 W 의 시퀀스(sequence)는 아래와 같이 나타냄

[그림 II-3] 소비 및 유산 효용의 시퀀스 구조



출처: DREAM(2021), p. 45.

- 나무의 모든 항목은 t 기에 살아 있는 에이전트의 관점으로부터 계산되어 각각의 확률을 갖고 있음
 - 이 확률은 시간이 지나면서 평균수명이 늘어남에 따라 변화함
- 시퀀스는 합계 표현식 $S_{a,t}$ 객체로 나타내며, 나이와 시간에 대한 지수도 포함함

$$S_{a,t} = U_{a,t} + \sum_{j=1}^A \left(\prod_{i=1}^j \beta_{a+i,t+i} \right) \left(\prod_{i=1}^{j-1} s_{a+i,t+i} \right) [s_{a+j,t+j} U_{a+j,t+j} + (1-s_{a+j,t+j}) W_{a+j-1,t+j-1}]$$

□ (CES 효용 흐름) CES 효용 흐름은 아래와 같음

$$U_{a,t} = \frac{1}{1-\eta} [\tilde{U}_{a,t}]^{1-\eta}$$

$$\tilde{U}_{a,t} \equiv \left[(v_{a,t}^c)^{\frac{1}{E}} (C_{a,t})^{\frac{E-1}{E}} + (v_{a,t}^d)^{\frac{1}{E}} (D_{a,t})^{\frac{E-1}{E}} \right]^{\frac{E}{E-1}}$$

$$\frac{\partial U_{a,t}}{\partial C_{a,t}} \equiv U_{a,t}^1 = [\tilde{U}_{a,t}]^{-\eta} \times \left(\frac{v_{a,t}^c \tilde{U}_{a,t}}{C_{a,t}} \right)^{\frac{1}{E}}$$

$$\frac{\partial U_{a,t}}{\partial D_{a,t}} \equiv U_{a,t}^2 = [\tilde{U}_{a,t}]^{-\eta} \times \left(\frac{v_{a,t}^d \tilde{U}_{a,t}}{D_{a,t}} \right)^{\frac{1}{E}}$$

□ (기준 소비량과 가계의 크기) 경직성을 캘리브레이션하기 위해 소비와 주택을 기준 대상으로 사용함

$$U_{a,t} \equiv U(\tilde{C}_{a,t}, \tilde{D}_{a,t})$$

○ $\tilde{C}_{a,t}$ 는 상관계수 χ 와 기준량(a reference quantity)을 차감한 소비를 나타냄

$$\tilde{C}_{a,t} = \frac{C_{a,t}}{\zeta_{a,t}} - \chi^C \frac{C_{a-1,t-1}}{\zeta_{a-1,t-1}}$$

○ 가중치 $\zeta_{a,t}$ 는 가계 내 자녀 수를 의미함

- 자녀의 수는 가계 내 저축과 소비 행동에 영향을 미침으로 모델에서 명시하는 것이 유용함

$$\zeta_{a,t} = 1 + \frac{1}{2} n_{a,t}^{children}$$

○ 주택 $\tilde{D}_{a,t}$ 도 $\tilde{C}_{a,t}$ 와 같은 방식으로 고려함

$$\tilde{D}_{a,t} = \frac{D_{a,t}}{\zeta_{a,t}} - \chi^D \frac{D_{a-1,t-1}}{\zeta_{a-1,t-1}}$$

○ 기준량(a reference quantity) $C_{a-1,t-1}$ 과 $D_{a-1,t-1}$ 은 직전 기간의 코호트 평균으로 볼 수 있으며, 이러한 방식은 가계에 대하여 외생적임

- 총 코호트의 소비 $C_{a,t}^{total}$ 과 주택 $D_{a,t}^{total}$ 은 합리적인 에이전트와 비합리적인 에이전트의 총합임

$$C_{a,t}^{total} = N_{a,t} [(1 - \Upsilon)C_{a,t}^{unc} + \Upsilon C_{a,t}^{con}]$$

$$D_{a,t}^{total} = N_{a,t} [(1 - \Upsilon)D_{a,t}^{unc} + \Upsilon D_{a,t}^{con}]$$

4) 예산제약 내 주택과 담보대출

- 예산제약 도출 시 주택 투자 수익이 양(+인 경우($z_{a,t} > 0$))와 음(-인 경우($z_{a,t} < 0$))를 고려하고, 양(+인 경우 투자 계약금에 제한을 둠

- 주택 총량 $D_{a,t}$ 에 대한 운동법칙 식은 아래와 같음

$$D_{a,t} = (1 - \delta^d)D_{a-1,t-1} + z_{a,t}$$

- 예산제약식의 가독성을 높이기 위해 복합 변수(the composite variable)를 정의함

$$\Delta_{a,t} \equiv B_{a,t} - (1 + r_{a,t}^h)B_{a-1,t-1} - yDisp_{a,t} + rent_t H_{a,t}$$

- 주택담보대출이 주택 가치에 비례한다면, 주택담보대출 총량 $X_{a,t}^M$ 에 대하여 외생적 관계라고 상정함

$$X_{a,t}^M = \mu_{a,t} P_t^D D_{a,t}$$

- 주택 가치 $\mu_{a,t}$ 는 가계에 대한 외생 변수임

- 주택 투자 수익이 양(+인 경우($z_{a,t} > 0$))의 예산제약을 고려함

- $M_{a,t}^{DP} > 0$ 은 주택 총량(계약금, the down-payment)이 증가할 때 지출되는 금액이며, $m_{a,t}$ 는 명시되지 않은 주택담보대출금이고 대출 총량의 크기는 아래의 운동법칙을 따름

$$X_{a,t}^M = (1 + r_t^{mort})X_{a-1,t-1}^M + P_t^D Z_{a,t} - M_{a,t}^{DP} - m_{a,t}$$

- 가계의 예산제약은 아래와 같으며 τ^W 는 부유세율, x_t 는 자산운영 비용 측정값, α_t^{Land} 는 토지 매도로 인해 얻은 수익임

$$\Delta_{a,t} + P_t^C C_{a,t} = -M_{a,t}^{DP} - m_{a,t} - (\tau_t^W + x_t)P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} + P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} \alpha_t^{Land}$$

- $X_{a,t} = \mu_{a,t} P_t^D D_{a,t}$ 와 D 와 X^M 에 대한 운동법칙을 사용하여 가계에 대한 예산제약을 구함

$$\begin{aligned} \Delta_{a,t} + P_t^C C_{a,t} = & -(1 + r_t^{mort})\mu_{a-1,t-1}P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} + \mu_{a,t}P_t^D D_{a,t} \\ & - P_t^D D_{a,t} + P_t^D(1 - \delta_t)D_{a-1,t-1} \\ & - (\tau_t^W + x_t)P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} + P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} \alpha_t^{Land} \end{aligned}$$

- 주택 투자수익이 음(-)인 경우($z_{a,t} < 0$)의 예산제약을 고려함

- 이 가계의 예산제약은 계약금이 없으므로 주택 매도로 인한 순 판매 수익으로만 이뤄져 있음

$$\begin{aligned} \Delta_{a,t} + P_t^C C_{a,t} = & -P_t^D Z_{a,t} - m_{a,t} \\ & - (\tau_t^W + x_t)P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} + P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} \alpha_t^{Land} \end{aligned}$$

- 주택 매도로 인한 수익으로 주택담보대출 비용을 상환하지 않으며, 주택담보대출 총량의 크기는 운동법칙을 따름

$$X_{a,t}^M = (1 + r_t^{mort}) \times X_{a-1,t-1}^M - m_{a,t}$$

- 주택투자수익이 양(+인 경우와 음(-)인 경우의 예산제약을 합한 식은 아래와 같음

$$\begin{aligned} \Delta_{a,t} + P_t^C C_{a,t} = & -(1 + r_t^{mort})\mu_{a-1,t-1}P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} + \mu_{a,t}P_t^D D_{a,t} \\ & - P_t^D D_{a,t} + P_t^D(1 - \delta_t)D_{a-1,t-1} \\ & - (\tau_t^W + x_t)P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} + P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} \alpha_t^{Land} \end{aligned}$$

- 두 경우를 더했을 때 비대칭성이 나타나지 않는 이유는 다음과 같음
- 외생적으로 주택담보대출 비율을 고정하면 주택담보대출 규모는 선택의 여지가 없

- 으므로, 주택에 대한 투자는 긍정적이든 부정적이든 상관없이 없어짐
 - 주목할 점은 주택담보대출 상환 $m_{a,t}$ 에 대한 문제가 완전히 사라짐

□ (담보대출 비율 μ) 주택담보대출은 주택의 가치에 비례함

$$X_{a,t}^M = \mu_{a,t} P_t^D D_{a,t}$$

- $\mu_{a,t}$ 는 외생적이고 관련 식은 아래와 같으며, $\tilde{\mu}_{a,t}$ 는 모델에서 외생적으로 보정한 객체임

$$\mu_{a,t} = \tilde{\mu}_{a,t} \frac{\bar{P}_{a,t}^D}{P_t^D}$$

- 기준가격(the reference price) $\bar{P}_{a,t}^D$ 는 현재와 과거의 가격에 대한 함수 형식임

$$\bar{P}_{a,t}^D = \Gamma_{a,t} P_t^D + (1 - \Gamma_{a,t}) \bar{P}_{a-1,t-1}^D$$

- $\Gamma_{a,t}$ 는 신규 주택담보대출 건수를 측정하는 것이며, 총 주택 수 대비 현재 투자비율을 나타냄

$$\Gamma_{a,t} = \frac{Z_{a,t}}{D_{a,t}} = \frac{D_{a,t} - (1 - \delta^d) D_{a-1,t-1}}{D_{a,t}}$$

- 경제 활동을 처음 시작하는 세대가 집을 구매할 시 $\Gamma_{a,t}$ 는 1이며, 모든 주택담보대출은 신규이고 매입 당시의 가격을 적용받음
- $\Gamma_{a,t}$ 숫자는 1 이상이고 D 는 항상 양수(+)이므로 유한한 하한을 가짐
- 젊은 에이전트들은 노령 에이전트보다 주택가격에 대해 더 큰 변동성을 가짐
- 주택담보대출을 통해 자금을 조달할 수 있는 금액은 주택가격에 따라 다르므로, 주택가격의 상승은 $\Gamma_{a,t}$ 를 하락하게 함

$$\mu_{a,t} = \tilde{\mu}_{a,t} \frac{\bar{P}_{a,t}^D}{P_t^D} = \tilde{\mu}_{a,t} \left(\Gamma_{a,t} + (1 - \Gamma_{a,t}) \frac{\bar{P}_{a-1,t-1}^D}{P_t^D} \right)$$

- 주택가격은 주택담보대출 총량 $X_{a,t}^M = \mu_{a,t} P_t^D D_{a,t}$ 로 인해 비례적이지 않고 일정하게 상승함

- 따라서 가계는 더 많은 주택담보대출을 받을 수 있지만, 반대로 주택가격이 상승할 수록 레버리지 비율은 하락함
- 주택 구매 결정은 주택가격의 영향을 받고 주택담보대출은 더 크게 영향을 받으므로 $\Gamma_{a,t}$ 는 내생적으로 변화함
 - 주택 투자가 감소세라면 레버리지 비율은 주택가격 상승분보다 약간 떨어짐
 - 주택가격 상승의 지속 여부는 주택 투자 결정에 영향을 미치며, 일시적인 주택가격 상승은 강한 투자 하락을 야기함
- 주택담보대출 비율에 대한 내생적인 주택 구매 결정의 영향을 통제하는 것을 허용하도록 $\Gamma_{a,t}$ 요소를 좀 더 일반적인 방법으로 쓰면 아래와 같음

$$\Gamma_{a,t} = (1 - \phi) + \phi \frac{D_{a,t} - (1 - \delta^d)D_{a-1,t-1}}{D_{a,t}} = 1 - \phi(1 - \delta^d) \frac{D_{a-1,t-1}}{D_{a,t}}$$

- 객체 $\phi(1 - \delta^d)$ 는 단일상수로 표현함
- 거래 비용과 같은 미시적 수준의 데이터를 집계하는 것은 모델을 정확하게 묘사하기 위해선 필요한 작업이지만, 소프트웨어 과부하로 인해 계산 부담이 가중되어 MAKRO 모델에서는 거래 비용을 제외함
 - 따라서 거래 비용은 주택가격 효용함수에 내재되어 있다고 가정함

5) 가계의 총합

- 이주민을 감안한 덴마크 인구에 대한 식은 아래와 같음. 데이터상 이주자들의 가계와 덴마크 거주 가계들의 자산은 차이가 있지만, 모델 안에서 모든 가계는 평균이라고 가정함

$$N_{a,t} = s_{a-1,t-1}N_{a-1,t-1} + I_{a,t} - E_{a,t}$$

- 가계 모형은 나이와 HTM 에이전트로만 구분됨
- 자산 B , 주택 D , 소비 C , 고용에 대해 평균량을 생성하도록 거주자와 이민자를 내부적으로 일관된 방식으로 포괄함
- (무주택 가계 총합) 덴마크 국내 거주자, 이주 가는 자, 이주 오는 자로 구분하여 예산제약을 설정함

- (국내거주자) 국내 거주자 $s_{a-1,t-1}N_{a-1,t-1} - E_{a,t}$ 의 예산제약에서 이전금 $T_{a,t}^S$ 가 더해짐

- $x_{a,t} \equiv y_{a,t} - P_t^C C_{a,t}$ 이며, $T_{a,t}^S$ 에서 위첨자 S는 국내 거주자를 의미함

$$B_{a,t} - x_{a,t} = (1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} + T_{a,t}^S$$

- (이주 가는 자) $E_{a,t}$ 는 국외로 떠나기 전 이전금 $T_{a,t}^E$ 를 받거나 지불함
 - 이주 가는 자는 국외로 떠나기 전에 덴마크에서 수입과 지출이 발생하지 않고 자산도 매입하지 않으며, 국외로 가져갈 자산에 대해서 $M_{a,t}$ 로 정의함

$$M_{a,t} \equiv (1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} + T_{a,t}^E$$

- (이주 오는 자) $I_{a,t}$ 는 덴마크 정착 후, 이전금 $T_{a,t}^I$ 을 받거나 지불함
 - 이전금 $T_{a,t}^I$ 와 국내로 들여온 자산 A 는 국내 거주자의 예산제약과 동일함

$$B_{a,t} - x_{a,t} = A_{a-1,t-1} + T_{a,t}^I$$

- 수지균형(the balance of payment)에 순 0의 효과(a zero net effect)를 부과함

- 이는 이주 오는 가계와 이주 가는 가계의 관계를 나타내며 관련 식은 아래와 같음

$$A_{a-1,t-1} = \frac{E_{a,t}}{I_{a,t}} M_{a,t} = \frac{E_{a,t}}{I_{a,t}} (1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} + \frac{E_{a,t}}{I_{a,t}} T_{a,t}^E$$

- 다음으로 이전금의 합은 0 즉, 국제 수지가 균형이 되도록 함

$$[s_{a-1,t-1}N_{a-1,t-1} - E_{a,t}] T_{a,t}^S + E_{a,t} T_{a,t}^E + I_{a,t} T_{a,t}^I = 0$$

- 마지막으로 국내 거주자와 이주 오는 가계의 예산제약이 같도록 함

$$T_{a,t}^I = (1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} + T_{a,t}^S - A_{a-1,t-1}$$

- 이제 총인구 $N_{a,t}$ 의 예산제약 집계가 가능하며 이에 대한 작업은 아래와 같음

- 국내 거주자 $s_{a-1,t-1}N_{a-1,t-1} - E_{a,t}$ 와 이주 오는 자를 합하여 도출함

$$N_{a,t}[B_{a,t} - x_{a,t}] = [s_{a-1,t-1}N_{a-1,t-1} - E_{a,t}][(1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} + T_{a,t}^S] \\ + I_{a,t}[A_{a-1,t-1} + T_{a,t}^I]$$

- 국내 거주자와 이주 오는 자의 수지균형이 동일하면(the zero balance of payments) 아래와 같은 식이 도출됨

$$N_{a,t}[B_{a,t} - x_{a,t}] = [s_{a-1,t-1}N_{a-1,t-1} - E_{a,t}][(1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} + T_{a,t}^S] \\ + I_{a,t} \left[\frac{E_{a,t}}{I_{a,t}}(1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} + \frac{E_{a,t}}{I_{a,t}}T_{a,t}^E + T_{a,t}^S \right]$$

- T^I 는 T^S 와 동일하다는 것으로 대체하며 식은 아래와 같음

$$B_{a,t} - x_{a,t} = (1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} + T_{a,t}^S$$

- 이전금 T 를 결정하기 위해서, 0의 수지균형(zero balance of payment), 0의 이전금(zero net transfers), 국내 거주자와 이주 오는 자, 이주 오는 자와 이주 가는 자를 동일한 관계로 설정하면 아래와 같음

$$T_{a,t}^S = - \frac{(I_{a,t} - E_{a,t})}{N_{a,t}}(1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} \\ T_{a,t}^I = (I_{a,t} - E_{a,t}) \left[\frac{1}{I_{a,t}} - \frac{1}{N_{a,t}} \right] (1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} - \frac{E_{a,t}}{I_{a,t}}T_{a,t}^E$$

- 총 예산제약식은 다음과 같이 나타낼 수 있음

$$B_{a,t} - x_{a,t} = (1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} + \Gamma_{a,t} \\ \Gamma_{a,t} = \frac{s_{a-1,t-1}N_{a-1,t-1}}{N_{a,t}}$$

- 이전금 $T_{a,t}^E$ 는 임의적이므로 균형(zero)으로 설정할 수 있음
 - 이러한 이전금은 이주 오는 자와 이주 가는 자가 동일하다고 보장하는 인위적인 구조이며 이러한 경우에는 균형(zero)이 됨
- 이전금은 가계로부터 외생적이고 한계 결정에 영향을 받지 않은 일시금과 같은 문제로 더해짐

- 또한 모든 에이전트가 동일한 선택을 하므로, 모든 가계에 적용되는 유일한 예산제약은 아래와 같음

$$B_{a,t} - x_{a,t} = (1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} - \Gamma_{a,t}$$

- (유주택 가계 총합) 거주자 $s_{a-1,t-1}N_{a-1,t-1} - E_{a,t}$ 는 아래의 예산제약식을 가짐

$$B_{a,t} - x_{a,t} + (1 - \mu_{a,t})P_t^D D_{a,t} = (1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} - \chi_{a,t}P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} + T_{a,t}^S$$

$$x_{a,t} = y_{a,t} - P_t^C C_{a,t}$$

$$\chi_{a,t} \equiv (1 + r_t^{mort})\mu_{a-1,t-1} + \tau_t^W + x_t - \frac{P_t^D}{P_{t-1}^D}(1 - \delta_t^d) - \alpha_t^{Land}$$

- (이주 가는 자) 이주 가는 자 $E_{a,t}$ 는 국내에서 근로 활동 및 소비를 하지 않고 ($z_{a,t} = -(1 - \delta_t)D_{a-1,t-1} < 0$) 보유 주택을 판매하여 자산을 가지고 해외로 이주함
 - 이들은 해외로 이주 전 자산 규모를 줄이고 있으므로 그들의 예산제약은 대부분 자산 판매 수익임
 - 주택담보대출금 m 은 미상환된 주택담보대출금을 청산하며, 최종적으로 $M_{a,t}$ 는 이주 가는 자들이 해외로 가져갈 자산에 대한 총 금액을 의미함

$$M_{a,t} \equiv (1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} - \chi_{a,t}P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} + T_{a,t}^E$$

- (이주 오는 자) 이주 오는 자 $I_{a,t}$ 의 경우 국내에서 소득 및 소비가 발생($z_{a,t} = D_{a-1,t-1} > 0$)하고 해외에서 갖고 온 자산 $A_{a-1,t-1}$ 이 있음
 - 주택 구매에 대한 지출 식은 $(1 - \mu_a)P_t^D D_{a,t}$ 이며, 이주 오는 자에 대한 총 예산제약은 아래와 같음

$$B_{a,t} - x_{a,t} + (1 - \mu_{a,t})P_t^D D_{a,t} = A_{a-1,t-1} + T_{a,t}^I$$

- 위의 세 조건을 부과하여 0의 수지균형효과(the zero balance of payments effect)를 재정의함

$$A_{a-1,t-1} = \frac{E_{a,t}}{I_{a,t}} M_{a,t}$$

- 이전금의 합도 균형을 이루며 아래의 식과 같음

$$[s_{a-1,t-1}, N_{a-1,t-1} - E_{a,t}]T_{a,t}^S + E_{a,t}T_{a,t}^E + I_{a,t}T_{a,t}^I = 0$$

- 이제 국내 거주자와 이주 오는 자의 이전금 T 는 결과적으로 동일함

$$T_{a,t}^I = (1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} - \chi_{a,t}P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} + T_{a,t}^S - A_{a-1,t-1}$$

- 이주 오는 자와 같은 동일한 단계를 수행하여, 이주 가는 자들의 이전금에 대해 $T_{a,t}^E = 0$ 을 도출할 수 있음

- 아래 식은 총 예산제약에 관한 식이고, $T_{a,t}^S$ 는 기존 거주 가계 이전금에 대한 식임

$$B_{a,t} + (1 - \mu_{a,t})P_t^D D_{a,t} = y_{a,t} - P_t^C C_{a,t} \\ + [(1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} - \chi_{a,t}P_{t-1}^D D_{a-1,t-1}] \Gamma_{a,t} \\ T_{a,t}^S = - \frac{(I_{a,t} - E_{a,t})}{N_{a,t}} [(1 + r_{a,t})B_{a-1,t-1} - \chi_{a,t}P_{t-1}^D D_{a-1,t-1}]$$

6) 주택 증개

- 가계는 증개업자로부터 주택을 매입하며 증개업자는 건설 부문으로부터 자재를 구매하고 토지를 매입해 주택을 지은 후 가계에 분양함

- q_t^n 은 주어진 기간에 지어진 새 주택이며, 이는 연령대별 합산 후 가계 문제에서 얻어진 총 순투자와 일치함 $q_t^n \equiv D_t - (1 - \delta_t)D_{t-1}$

- 증개업자는 아래와 같은 식의 이익이 주어짐

$$\pi_t = P_t^D q_t^n - P_t^{Land} q_t^{LS} - P_t^I q_t^I$$

- 최근 지어진 주택 q_t^n 은 총 산출물에서 조정 비용을 뺀 값이며 총 산출물 q_t^y 는 토지 q_t^{LS} 와 건축자재 q_t^I 를 포함함

$$q_t^n = q_t^y - q_t^{ac}$$

- 수량으로 표기된 이유는 실제 데이터와 일치시키기 위해 필요한 건물의 재고 여분을 합하여 사용하기 위함임

- 조정비용함수는 주택가격과 수량의 동태적 변동을 고정시키기 위해 추가되었으며 관련 식은 아래와 같음

$$q_t^{ac} = \frac{\gamma}{2} q_{t-1}^I \left(\frac{q_t^I}{q_{t-1}^I} - \xi_t^I \right)^2$$

- 조정 비용은 개별 가구 수준으로 도입되는 것이 이상적이지만 이는 긴 수명 주기로 인한 계산 부담을 크게 증가시킴
- 또한 연령별 가구 수준의 조정 비용은 대부분 고정 비용으로, 계산적으로 더 많은 비용이 소요됨

- 조정비용함수 1계 조건은 다음과 같음

$$P_t^D \left[\frac{\partial q_t^y}{\partial q_t^{LS}} \right] \equiv P_t^D \left(\mu_{LS} \frac{q_t^y}{q_t^{LS}} \right)^{1/E} = P_t^{Land}$$

$$P_t^D \left[\frac{\partial q_t^y}{\partial q_t^{LS}} - \frac{\partial q_t^{ac}}{\partial q_t^I} \right] = P_t^I + \beta_{t+1} P_{t+1}^D \left[\frac{\partial q_{t+1}^{ac}}{\partial q_t^I} \right]$$

- 아래 식은 조정비용함수로부터 동태적이고 미래지향적인 2계 조건을 설명함

$$P_t^D \left[\left(\mu_I \frac{q_t^y}{q_t^I} \right)^{1/E} - \gamma \left(\frac{q_t^I}{q_{t-1}^I} - \xi_t^I \right) \right] = P_t^I + \beta_{t+1} P_{t+1}^D \left[\frac{\gamma}{2} \left(\frac{q_{t+1}^I}{q_t^I} \right)^2 + \frac{\gamma}{2} (\xi_{t+1}^I)^2 \right]$$

- 수요함수를 CES 방식으로 작성하면 아래와 같음

$$q_t^{LS} = \mu_{LS} \cdot q_t^y \left(\frac{P_t^{Land}}{P_t^D} \right)^{-E}$$

$$q_t^I = \mu_I \cdot q_t^y \left(\frac{user_t}{P_t^D} \right)^{-E}$$

$$user_t = P_t^I + \gamma P_t^D \left\{ \frac{q_t^I}{q_{t-1}^I} - \xi_t^I + \beta_{t+1} \frac{P_{t+1}^D}{P_t^D} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{q_{t+1}^I}{q_t^I} \right)^2 + (\xi_{t+1}^I)^2 \right] \right\}$$

- 수요함수를 고려할 시, 최적화 문제는 CES 0의 이윤 조건과 조정비용함수를 사용하여 해결함

$$P_t^D q_t^y = P_t^{Land} q_t^{LS} + user_t q_t^I$$

- q_t^I 는 재고 변수 q_t^K 를 생성하는 데 사용되며 δ 은 주택을 짓기 위한 자재의 감가비율을 나타냄

$$q_t^k = (1 - \delta_t)q_{t-1}^k + q_t^I$$

- 재고 수량 q_t^K 는 이미 보유한 주택을 포함한 모든 주택 자재의 총 재고량을 의미함

- (중개업자의 이익 및 가계의 예산제약의 합) 중개업자의 이익 발생으로 인하여 조정 비용이 더해졌으며, 이는 데이터와 일치시키기 위한 보조적 수단으로 사용됨
- 발생한 이익은 사용자비용과 가계의 한계 결정에 영향을 주지 않는 이전금으로 가계의 예산제약에 재유입됨
- 이 이익은 가계의 예산제약에서 설명한 바와 같이 가중치 $D_{a-1,t-1}/D_{t-1}$ 을 사용하여 연령별로 가계에 할당됨

$$\begin{aligned} B_{a,t} &= B_{a-1,t-1} + r_{a,t}B_{a-1,t-1} + \tilde{y}_{a,t} - p_t^c c_{a,t} - (1 - \mu_{a,t})P_t^D D_{a,t} \\ &\quad - \left\{ (1 + r_t^{mort})\mu_{a-1,t-1} + \tau_t^W + x_t - \frac{P_t^D}{P_{t-1}^D}(1 - \delta_t^d) - \alpha_t^{Land} \right\} P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} \\ &\quad + \underbrace{\frac{D_{a-1,t-1}}{D_{t-1}}}_{weight} \left\{ \underbrace{P_t^D [D_t - (1 - \delta_t^d)D_{t-1}] - P_t^{Land} q_t^{LS} - P_t^I q_t^I}_{Profits} \right\} \end{aligned}$$

- 위 식의 표현을 단순화하고 계산 부담을 줄이기 위해 예산제약식을 재정리함
- 위 식의 마지막 줄을 분해하면 다음과 같음

$$\dots \frac{D_{a-1,t-1}}{D_{t-1}} P_t^D [D_t - (1 - \delta_t^d)D_{t-1}] - \frac{D_{a-1,t-1}}{D_{t-1}} P_t^{Land} q_t^{LS} - \frac{D_{a-1,t-1}}{D_{t-1}} P_t^I q_t^I$$

- 그런 다음 $(1 - \delta_t^d)$ 을 제거하여 아래와 같은 식을 얻음

$$\begin{aligned} B_{a,t} &= B_{a-1,t-1} + r_{a,t}B_{a-1,t-1} + \tilde{y}_{a,t} - p_t^c c_{a,t} - (1 - \mu_{a,t})P_t^D D_{a,t} \\ &\quad - \left\{ (1 + r_t^{mort})\mu_{a-1,t-1} + \tau_t^W + x_t \right\} P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} + \alpha_t^{Land} P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} \\ &\quad + P_t^D D_{a-1,t-1} \left[\frac{D_t}{D_{t-1}} \right] - \frac{D_{a-1,t-1}}{D_{t-1}} P_t^{Land} q_t^{LS} - \frac{D_{a-1,t-1}}{D_{t-1}} P_t^I q_t^I \end{aligned}$$

- 앞에서 주어진 a_t^{Land} 를 사용함

$$\alpha_t^{Land} = \Omega_t^{Land} \frac{P_t^{Land} q_t^{LS}}{P_{t-1}^D} = \frac{1}{D_{t-1}} \frac{P_t^{Land} q_t^{LS}}{P_{t-1}^D}$$

- 토지 항은 식에서 완전히 없애고 최소한의 항으로 예산제약식을 얻음

$$\begin{aligned} B_{a,t} &= B_{a-1,t-1} + r_{a,t} B_{a-1,t-1} + \tilde{y}_{a,t} - p_t^c c_{a,t} \\ &\quad - (1 - \mu_{a,t}) P_t^D D_{a,t} - \{(1 + r_t^{mort}) \mu_{a-1,t-1} + \tau_t^W + x_t\} P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} \\ &\quad + [P_t^D D_t - P_t^I q_t^I] \frac{P_{t-1}^D D_{a-1,t-1}}{P_{t-1}^D D_{t-1}} \end{aligned}$$

□ (HTM 가계) HTM 가계의 예산제약식 $y_{a,t}$ 와 최적 결정에 대한 식은 각각 아래와 같음

$$y_{a,t} = p_t^c c_{a,t} + f(D_{a,t}, D_{a-1,t-1})$$

$$D_{a,t} - \chi^D D_{a-1,t-1} = \lambda_{a,t}^D \cdot (C_{a,t} - \chi^C C_{a-1,t-1}) \cdot \left(\frac{P_t^D}{P_t} \right)^{-\eta}$$

○ 중개 이익을 교정한 HTM 가계의 예산제약은 아래와 같음

$$\begin{aligned} y_{a,t} &= p_t^c c_{a,t} + (1 - \mu_{a,t}) P_t^D D_{a,t} \\ &\quad + \{(1 + r_t^{mort}) \mu_{a-1,t-1} + \tau_t^W + x_t\} P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} \\ &\quad + [P_t^I q_t^I - P_t^D D_t] \frac{P_{t-1}^D D_{a-1,t-1}}{P_{t-1}^D D_{t-1}} \end{aligned}$$

7) 효용함수 내 자산(Wealth in the utility function)

□ 효용자산은 가계모형 내 할인 요인을 적합시키는 데 도움을 줌

○ 아래 식은 로그 효용 및 100% 자본 감가, 자본 효용의 확장과 같은 에이전트의 대표적 문제를 고려함

$$U = \log(AK_t^\alpha - K_{t+1}) + \gamma \log(K_t)$$

- $\gamma = 0$ 일 경우 $K_{t+1} = \alpha\beta AK_t^\alpha$ 의 해를 가지며, β 는 할인 요인임
- $\gamma > 0$ 일 경우 아래의 식과 같음. 만일 $1 > \alpha\beta$ 인 경우 투자는 더 많이 이뤄지며, 더 큰 자본스톡을 생성하도록 허용함

$$K_{t+1} = \frac{\alpha\beta + \gamma\beta}{1 + \gamma\beta} AK_t^\alpha$$

- 반면 $\gamma = 0$ 일 경우와 $\gamma > 0$ 일 경우를 동일한 데이터로 적합시키길 원하고 α 값을 동일하게 유지시킨다면, β_0 이 재표기되는 표준모델에서의 새로운 β 값, 새로운 γ 값의 관계를 얻게 되며 아래와 같은 동일한 투자비율을 가진

$$\frac{\alpha\beta + \gamma\beta}{1 + \gamma\beta} = \beta_0\alpha$$

- 새로운 β 는 예전 β_0 와 γ 의 함수이며, 아래의 제약이 따름

$$\beta(\beta_0, \gamma, \alpha) = \frac{\beta_0\alpha}{\alpha + \gamma - \beta_0\alpha\gamma} = \beta_0 \frac{\alpha}{\alpha + \gamma(1 - \beta_0\alpha)} < \beta_0$$

- $\beta < \beta_0$ 로 인해 할인 요인은 점차 작아지며 할인율은 점차 증가함
 - 만약 자본에 대해 추가적인 효용을 갖고 있다면 미래에 추가적인 효용을 갖게 될 것이고, 추가적인 효용을 갖지 않고 그대로 유지하길 원한다면 미래에 더 큰 할인을 해야 함
- 이 추론은 상수값 γ 을 선택하고 새로운 β 를 예전 β_0 가 가질 수 있는 값으로 조정하는 경우에만 적용됨
- 반면, 새로운 상수값 β 를 선택하고 γ 를 예전 β_0 가 가질 수 있는 값으로 조정한다면 $\beta < \beta_0$ 조건으로 인해 γ 가 적합되어 아래의 제약이 부과됨

$$\gamma(\beta_0, \beta, \alpha) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\alpha}$$

- MAKRO의 수명 주기에서 할인 요인의 연령에 따른 변동성을 최소화하도록 하이브리드 접근법을 사용함

8) 레버리지 승수 효과

□ 주택담보대출은 모형에서 레버리지 효과를 생성함

- 주택가격이 상승할 때($p_t^D > p_{t-1}^D$), 채권은 p_{t-1}^D 일 때 가격이지만 주택의 자본은 주택 가격 p_t^D 로 평가됨
- 이러한 메커니즘은 예산제약에서 주택 비용 객체 f 에 명시되어 있음

$$f(D_{a,t}, D_{a-1,t-1}) = (1 - \mu_{a,t})P_t^D D_{a,t} + \left\{ (1 + r_t^{mort})\mu_{a-1,t-1} + \tau_t^W + x_t - \frac{P_t^D}{P_{t-1}^D}(1 - \delta_t^d) - \alpha_t^{Land} \right\} P_{t-1}^D D_{a-1,t-1}$$

- 위의 식을 재정리 하면 아래와 같음

$$f = \underbrace{(1 - \mu_{a,t})P_t^D D_{a,t}}_{\text{Out of pocket : new house equity}} - \left[\underbrace{(1 - \delta_t^d) \frac{P_t^D}{P_{t-1}^D} - \mu_{a-1,t-1}}_{\text{existing house equity ratio}} \right] P_{t-1}^D D_{a-1,t-1} + \underbrace{\{ r_t^{mort} \mu_{a-1,t-1} + \tau_t^W + x_t - \alpha_t^{Land} \} P_{t-1}^D D_{a-1,t-1}}_{\text{Unavoidable net carrying costs}}$$

- 중요한 특징은 주택가격 상승이 과거 부채 $\mu_{a-1,t-1}$ 에 큰 영향을 받지 않는 한계 효과를 가지고 있다는 것임

$$\frac{\partial f}{\partial p_t^D} = \underbrace{(1 - \mu_{a,t})D_{a,t}}_{\text{effect on new house equity}} - \underbrace{(1 - \delta_t^d)D_{a-1,t-1}}_{\text{effect on existing house equity}}$$

- 주택가격이 상승할 때, $1 - \delta > 1 - \mu$ 로 인해 주택 구매 비용이 줄어든다면 주택을 추가로 매입할 수 있게 됨

- 식에서 거래 비용이 없다는 것은 레버리지 효과는 비용이 들지 않는다는 장점을 암시하며, 이는 잠재적으로 강한 레버리지 효과를 생성하게 됨
- 합리적인 에이전트들은 주택가격 상승이 일시적으로 일어난다면, 주택가격이 앞으로 하락할 것으로 인지하며 주택을 추가적으로 매입하지 않음
 - 주택가격 하락으로 인해 자본 손실을 예상하기 때문임
- 반면, HTM 가계들은 합리적인 에이전트들과 다르게 합리적인 의사결정은 하지 않는다고 가정하므로 레버리지 효과는 주로 이들 가계에서 일어날 것으로 예상됨

- 주택담보대출 계약은 주택가격이 상승할수록 악화되며 $\partial\mu/\partial p < 0$ 일 때 가속되기보다는 안정화됨
 - 현재 거주 주택(담보물)의 가치가 상승하더라도 주택담보대출과 같은 금융 제약은 완화되는 것이 아니라 더 강화됨
 - 그러나 가계는 예산적인 여유로 주택담보대출을 더 일으킬 수 있으며 약간 낮은 가치의 주택을 추가적으로 매입할 수 있음
 - 남겨진 유산으로부터 효용이 발생하며, 이는 $B + p(1 - \mu)D$ 식으로 나타나며 오목함수임
 - 주택가격 상승으로 인해 가계의 예산제약은 느슨해지며, 추가적으로 주택 구매를 하면 다음 기간에도 제약은 느슨해짐

2. 기업

- 본 장에서는 총 5개의 주요 구성 요소 중 원자재 $R_{sp,t}$ 와 투자 $I_{i,s,t}$ 그리고 노동 L_t 에 대해 다루며, 세부 구성은 아래와 같음
 - (비용 최소화) 생산함수, CES 나무 그리고 비용 최소화에 대한 내용을 포함
 - (동태적 최적화) 동태적 최적화에 대한 설명 및 자본의 사용자비용 계산을 포함
 - (부록) 모형 및 데이터 내에서 활용된 모수 및 방정식의 설명 등 포함
- 기업은 이익의 현재할인가치 극대화를 추구하며, 할인 요인은 주식투자자의 차익거래 조건을 반영함
 - 이익의 극대화 문제를 해결하기 위해 비용 최소화와 가격 설정 최적화 과정이 필요하며, 각 과정별로 2개의 하위 부문으로 구분됨
 - 첫째는 제품을 생산하고 최적의 투입물을 선택하는 중간 하위 부문임
 - 둘째는 유통업체가 제조업체에 재화를 구매하고 가격을 설정한 후, 최종 고객에게 동일 재화를 판매하는 하위 부문임
- 본 모형에서 공공 부문 외 총 8개의 민간 부문(sp)이 존재함
 - 민간 부문은 농어업, 건설, 에너지 공급, 에너지 추출, 주거, 제조(식품가공 포함), 해상운송 그리고 해상 서비스(해상운송 제외)로 구성

- 모형 내 민간 부문의 모든 제조업체는 노동, 자본 그리고 원자재를 투입물로 사용하며 CES 나무 기반의 생산함수를 통해 산출물을 생성함
 - 자본 및 원자재는 국내 기업을 통해 구입하거나 국외에서 수입할 수 있으며 노동 서비스는 가계에서 공급되고, 원자재 시장은 현물가격 기반의 현물시장이며 원자재에 대한 최적의 결정은 정태적으로 이뤄짐
 - 노동 및 자본에 대한 최적의 결정은 동태적으로 이뤄지며, 관련 가격 측정은 최적성에 대한 시점 간 1계 조건에서 산출된 사용자비용을 통해 이뤄짐
- 정확한 사용자비용이 산출되면 기업 문제는 CES 나무의 모든 수준에서 일련의 비용 최소화 문제를 통해 해결됨
 - CES 나무의 하위 수준은 2단계로 나뉘며, 1단계에서는 모든 생산 부문의 원자재 및 투자재의 투입물에 대한 수요를 결정하고, 2단계에서는 각 부문별 국내 생산 및 국외 수입 여부를 결정함
 - 두 하위 수준은 코드상에서 기업 문제와 시장 청산 관계의 투입물 및 산출물 체계로 분리되어 있으며, 규모에 대한 수확 불변에 따라 이윤이 0인 중간 변환 부문으로 간주됨
 - CES 나무의 각 부문 및 여러 수준별 대체탄력성은 실증적 선행연구에 따라 0으로 가정함

가. 비용 최소화

1) 생산함수

- 총 산출물 Q 는 원자재 R , 자본 건축물(건물) K_{iB} , 기계 자본재 K_{iM} 그리고 노동 L 이 투입되어 생산되며, t 기의 부문 sp 별 총 산출물 Q 는 아래 식으로 나타냄

$$Q_{sp,t}^{KLBR} = Q(K_{iM,sp,t-1}, L_{sp,t}, K_{iB,sp,t-1}, R_{sp,t})$$

- 자본스톡은 산출되는 데 1기의 기간이 소요되며, 이는 자본스톡이 자본집약도에 따라 다양하게 사용될 수 있음에도 불구하고 단기적으로 고정됨을 의미함

2) CES 나무

- (상위 수준) 투입물은 생산함수 기반의 CES 중첩구조(Nest Structure)에서 결합됨

□ (하위 수준) 하위 수준에서 원자재 및 자본재는 별도의 2단계로 구분되어 있으며, 세부 내용은 아래와 같음

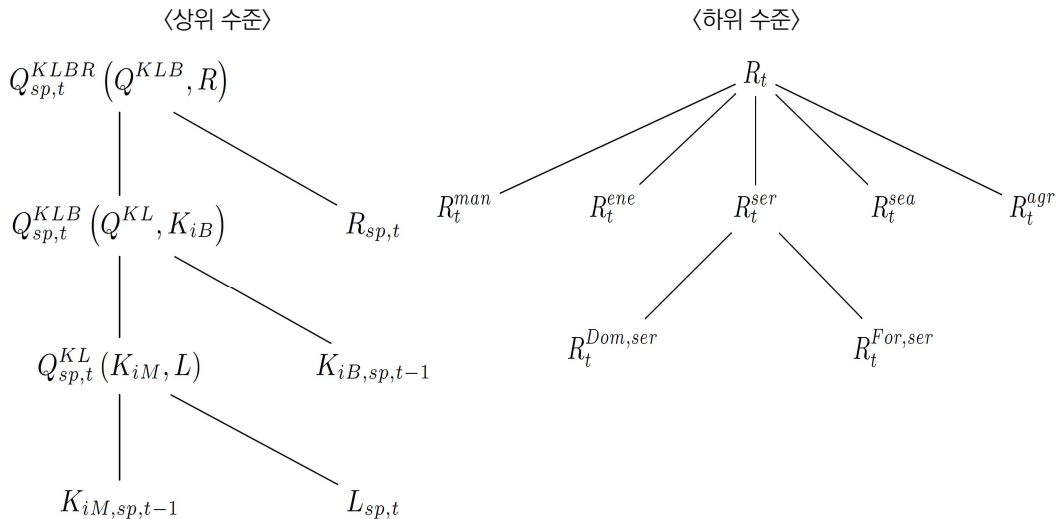
○ 별도의 2단계에 대한 세부 내용은 아래와 같음

- 1단계는 모든 부문의 수요 최적화를 이루는 단계로, 모든 부문의 재화에 대한 대체 탄력성이 동일하다고 가정함
 - 농업 및 서비스 부문에서 산출된 투입물은 농업 및 건설 부문에서 산출된 투입물과 동일한 대체재를 갖는다고 가정함
- 2단계에서는 국내외 공급자에 의해 산출된 서비스 부문의 투입물에 대한 수요 최적화 과정을 거침

○ 원자재는 유량인 반면 자본은 저량이기에 하위 수준에서 두 요소는 다소 상이하게 여겨지며, 자본재 중 건물과 기계는 원자재와 완전히 동일한 하위 수준으로 구성되어 있으며 투자 유량의 최적 구성을 결정함

- 투자 유량의 규모는 사용자비용과 저량의 최적 규모를 결정하는 미래지향적인 (forward looking) 문제의 해에 의해 결정됨

[그림 II-4] CES 나무의 구조



출처: DREAM(2021), p. 59.

- (투입물 가격) 상위 수준에서의 투입물 가격은 하위 수준 내 별도의 2단계로 인해 수요에 연동되며, 각 부문별로 다소 상이한 수요 조합을 갖고 있기에 부문별로 고유한 투입물 가격을 가짐
 - 투입물 가격은 국내외 각각 8개의 민간 부문, 총 16개 부문으로 구분되며, 국내외 공공재까지 포함할 경우 총 18개로 구분됨
 - 투자재의 투입물 가격은 투자 가격이라고 하는데, 타 부문의 생산자로부터 생산되는 산출물의 원가격에 대한 CES 총량이 이중으로 산출되기 때문임
 - 단일가인 투입물 가격은 인건비뿐이며, 인건비에 대한 사용자비용은 부문별로 차이가 있음

3) CES 비용 최소화

- 투입물에 대한 최적의 수요는 CES 나무의 각 수준에서 일련의 비용 최소화 과정을 거쳐 산출됨
 - $Q^{KL} = CES(K, L)$ 를 따르는 총비용($P^{KL}Q^{KL} = p^lL + p^kK$)은 CES 나무의 하위 수준에서 최소화되며, 이에 대한 해는 CES 나무의 모든 구조에서 다양하게 변환되어 아래의 객체를 산출함
 - μ^j 는 켈리브레이션된 척도 모수(scale parameter)이며 η 는 두 투입물 간 대체탄력성임
 - 변수 z^j 는 외생적 생산성뿐만 아니라 내생적 생산 요인 가동률, 외생적 구인공고 비용까지 포괄하며 투입물 가격 p^j 는 원자재를 제외한 사용자비용임
- CES 나무의 각 수준에서 비용 최소화 문제를 이행하면 생산성 항 z^j 의 일부는 확장되고 나머지 항은 제거되어 해당 문제 및 해는 변동이 없이 유지됨
 - 비용 최소화 문제의 해를 도출하는 과정에서 생산함수는 사용되지 않고 가계 문제의 효용함수처럼 도함수만 사용되며, 수요함수를 통해 비용 최소화 문제에 반영됨
 - 비용 최소화 문제는 수요함수와 $PQ = p^lL + p^kK$ 인 제약조건을 활용하여 해결함
 - CES 나무 내 모든 문제를 해결하기 위해서는 모든 투입물의 정확한 가격을 알아야 하며, 자본 및 노동의 정확한 투입물 가격을 산출하기 위해서는 미래지향적인(forward looking) 동태적 최적화 문제를 해결해야 함

$$\begin{aligned}
 \text{산출물} &\rightarrow Q^{KL} = Q = \left[(\mu^k)^{\frac{1}{\eta}} (z^k K)^{\frac{\eta-1}{\eta}} + (\mu^l)^{\frac{1}{\eta}} (z^l L)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}} \\
 \text{도함수} &\rightarrow \frac{\partial Q^{KL}}{\partial L} = z^l \left(\frac{\mu^l}{z^l} \frac{Q}{L} \right)^{\frac{1}{\eta}} \\
 \text{수요 / 1계 조건} &\rightarrow z^l L = \mu^l Q \left(\frac{P}{p^l} z^l \right)^{\eta} \\
 \text{CES 가격} &\rightarrow P^{KL} \equiv P = \left[\mu^k \left(\frac{p^k}{z^k} \right)^{1-\eta} + \mu^l \left(\frac{p^l}{z^l} \right)^{1-\eta} \right]^{\frac{1}{1-\eta}}
 \end{aligned}$$

나. 동태적 최적화

1) 정의

□ 모형 내 모든 자본스톡의 운동법칙(a law of motion)은 아래 식과 같음

$$K_t = (1 - \delta_t) K_{t-1} + I_t$$

○ δ^t 는 감가상각률, I_t 는 투자 유량이며, 재고 투자는 순 산출물에 비례한다고 가정함

($I_{Inv,t,sp,t} = \mu_{sp,t}^{Inv} Y_{sp,t}$). 재고는 축적되거나 생산에 기여하지 않음

- 재고는 세 가지 유형의 자본(재고, 기계, 건물)을 식별하는 지수 k 로 구분됨

($k = invt, iM, iB$)

□ 설치 및 조정 비용(Installation/Adjustment Costs) 산출 시 자본스톡이 활용되며 아래 식으로 나타냄

$$AC_t = \frac{\gamma}{2} K_{t-1} \left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \xi_t \frac{I_{t-1}}{K_{t-1}} \right)^2$$

○ 자본스톡이 산출되는 데 1기가 소요되기에 단기적으로 고정되며, u_t 에 따라 다양하게 활용됨

○ 구인공고 비용과 같은 조정 및 가동 비용은 데이터상에서 외연적으로 측정되지 않기 때문에 비관측된 생산 손실로 모형화됨

□ 조정 및 가동 비용은 총 생산량 Q 에서 차감되며, 총(순) 산출물 $Y_{sp,t}$ 는 아래 식으로 나타냄

$$Y_{sp,t} = Q_{sp,t}^{KLBRR} - \sum_k AC_{k,sp,t}$$

2) 할인 요인

□ 기업에 의해 발생된 현금 유량의 할인 요인은 $\beta_t = \frac{1}{(1+r_t)}$ 로 정의하며, 비제약 기업 (unconstrained firm)에 적용됨

- 자산을 1기 이상 보유할 때 보유기간 동안 자산소득 및 자본이익이 발생하고, 관련 차익거래는 기업의 자본 외 모든 자산에 적용되며 아래 식으로 나타냄

$$r_t V_{t-1} = Income_t + V_t - V_{t-1}$$

- 모든 민간 기업은 주식회사라 가정하고 주주의 요구수익률은 기업에 의해 결정되며, 소득 및 자본이익은 균제상태를 위해 내생적으로 조정됨
- 경제 충격이 발생하지 않을 경우 수익률 r_t 는 투자자들의 요구수익률이 되며 반대의 경우 경제 충격 당시의 요구수익률과 실현수익률 사이에 차이가 발생하여 차익거래 조건이 순간적으로 충족되지 않음
 - 부문별로 리스크 프리미엄이 상이할 경우, 요구수익률 또한 상이할 수 있음

3) 기업의 문제

□ 기업의 문제에서는 최적의 자본 선택을 중점적으로 다루며, 기업의 운영잉여 π 는 아래 식으로 나타냄

$$\begin{aligned} \pi_t = (1 - \tau_t) & \left(P_t Y_t - P_t^R R_t - [1 + \tau_t^I (1 - \mu_t^{SEMP})] w_t L_t \right) \\ & - \tau_t^K P_t^I K_{t-1} - T_t \\ & - \tau_t^{Debt} (1 - \tau_t) \mu_{t-1}^{Debt} P_{t-1}^I K_{t-1} \\ & - P_t^I I_t + \tau_t \delta_t^{Tax} K_{t-1}^{Tax} + \mu_t^{Debt} P_t^I K_t - \mu_{t-1}^{Debt} P_{t-1}^I K_{t-1} \\ & + q_t ((1 - \delta_t) K_{t-1} + I_t - K_t) \\ & + q_t^{Tax} ((1 - \delta_t^{Tax}) K_{t-1}^{Tax} + P_t^I I_t - K_t^{Tax}) \end{aligned}$$

- 위 식의 두 번째 괄호 안의 요소는 노동 및 원자재 비용이 차감된 순 산출물 Y_t , 자본세 그리고 일괄생산세 T_t 이며 모두 법인세율 τ_t 에 영향을 받음
 - τ^K 는 자본세율, τ^L 는 노동세율이며 노동세는 고용된 근로자에게만 부과됨
 - 순 산출물 Y_t 는 아래 식으로 나타냄

$$Y_t = Q_t(u_t K_{t-1}, R_t, L_t) - \frac{1}{2} \gamma K_{k,t-1} \left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \xi_t \frac{I_{t-1}}{K_{t-1}} \right)^2$$

- 두 번째 괄호 다음은 기업 부채 상환 비용으로 법인세의 영향을 받으며. 기업 부채는 기업의 자본구조 일부로 기업의 물적 자본에 비례한다고 가정함
- 그다음은 각각 명목 투자 비용, 자본의 감가상각으로 인한 세액공제, 법인세 증가(감소)로 인한 수익(비용), 자본의 운동법칙에 연계된 라그랑주 승수(Lagrange multiplier) 그리고 자본액의 장부 및 세금 가치 등임
 - 자본세의 가치는 명목 객체 K^{Tax} 로 나타냄

□ 기업 문제 내 요소들에 대한 1계 조건은 다음과 같음

- t기와 t+1기 사이의 할인 요인은 $\beta_{t+1} = \frac{1}{(1+r_{t+1})}$ 로 나타내며, 노동에 대한 최적의 선택은 동태적으로 이뤄짐. 노동시장 장에서 세부적으로 다룸
- 원자재 R_t 에 대한 1계 조건은 $P_t \frac{\partial Q_t}{\partial R_t} = P_t^R$ 로 나타내나 CES 비용 최소화 문제에서 산출된 것과 동일하기에 별도로 사용되지 않음
- 투자 I_t 에 대한 1계 조건은 아래 식으로 나타냄

$$q_t = P_t^I (1 - q_t^{Tax}) + \Gamma_t - \frac{\xi_{t+1}}{1 + r_{t+1}} \Gamma_{t+1}$$

$$\Gamma_t \equiv P_t (1 - \tau_t) \gamma \left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \xi_t \frac{I_{t-1}}{K_{t-1}} \right)$$

- I_t 의 1계 조건에서 토빈의 q 를 도출하며, 현재의 투자 증가는 비용을 즉각적으로 증가시키지만 장기적으로는 비용을 낮춰 더 많은 투자를 가능케 함
- 자본의 장부 및 세금 가치 K_t^{Tax} 에 대한 1계 조건은 아래 식으로 나타냄

$$q_t^{Tax} = \frac{\tau_{t+1} \delta_{t+1}^{Tax}}{(1+r_{t+1})} + \frac{(1-\delta_{t+1}^{Tax})}{(1+r_{t+1})} q_{t+1}^{Tax}$$

- 세액공제 감가상각률은 δ^{Tax} 로 나타내며, 세액공제는 투자 가치가 감가상각되는데 시간이 소요되기에 1기 이후에 이뤄짐
- 라그랑주 승수는 세액공제로 인한 미래 수익의 현재할인가치를 계산하는 벨만 방정식(Bellman equation)에 의해 산출됨

○ 자본 K_t 의 1계 조건은 아래 식으로 나타냄

$$P_{t+1} \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} - \tau_{t+1}^K P_{t+1}^I = q_t \frac{(1+r_{t+1})}{(1-\tau_{t+1})} - \frac{(1-\delta_{t+1})}{(1-\tau_{t+1})} q_{t+1} - \mu_t^D P_t^I \frac{(r_{t+1} - r_{t+1}^D (1-\tau_{t+1}))}{(1-\tau_{t+1})}$$

○ 자본의 사용자비용은 순 산출물의 도함수에서 도출됨

$$P_{t+1} \frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_t} \equiv P_{t+1} \underbrace{\frac{\partial Q_{t+1}}{\partial (u_{t+1} K_t)} u_{t+1}}_{P_{t+1}^K : \text{user cost of } K_t} - P_{t+1} \frac{\partial A C_{t+1}}{\partial K_t}$$

- 법인세율은 토빈의 q 에 따라 $\frac{1}{(1-\tau)}$ 만큼 자본의 사용자비용을 증가시키며, 자본세율 τ^K 또한 사용자비용을 증가시킴
- 기업 부채는 자본조달 비용(r_{t+1})보다 부채 비용(r_t^{Debt})이 낮기 때문에 사용자비용을 감소시키며, 위 식의 마지막 항은 t 기에 결정된 K_t 의 증가분과 $t+1$ 기의 설치 비용 감소분을 측정하는 데 활용됨

다. 금융 객체로서의 기업

- 기업은 생산 및 판매 목적으로 실물자본, 노동 서비스, 중간재를 거래하지 않으며 그 이유는 다음과 같음
 - 첫째, 기업은 금융 마찰(Financial frictions)을 고려하여 생산과 직접적으로 연관되지 않는 자산을 보유함
 - 금융 마찰 등의 마찰은 모형에서 최소한으로 구현되기에 대차대조표상 금융자산은

- 외연적(explicit) 최적화 결정 과정을 거치지 않고 간소하게 처리됨
- 둘째는 데이터의 집계 범위 때문에 집계 범위는 기업에서 부문으로 집계되는 수직적 범위와 각 부문별 기업 유형으로 집계되는 수평적 범위로 구분됨
 - 수평적 범위의 경우 투자펀드와 같은 금융회사와 제조업체가 묶여 있기 때문에 모형 내에서 기업의 생산과 금융 파트가 구분되어 있음
- 실물자본, 노동 서비스, 중간재 등은 기업 측면에서 국민계정과의 정합성을 위해 자세히 설명되어야 하며, 이를 위해 기업이 생성한 소득 유량 y_t 에 적용되는 할인율 r_t 와 소득변수를 정의해야 함
 - 금융자산은 소득 변수에 외생적으로 삽입되며 내생적 생산 결정에 의해 산출된 회사 가치의 일정 부분을 차지함

1) 할인율

- 할인율은 투자자가 기업의 지분을 소유하기 위해 요구하는 비율로 기업이 벌어들인 수입에 적용됨

$$V_{t-1} = \frac{y_t + V_t}{1 + r_t}$$

- 표준 차익거래는 기업 가치 V 와 소득 유량에 연계되며, 자기자본 기대수익률은 $r_t = r_t^{Bonds} + r_t^{rp}$ 로 채권수익률에 리스크 프리미엄 수익률을 합산하여 산출함
- 기업을 금융 및 생산의 독립적인 구성 요소로 분해하면 기업의 가치 V_{t+1} 을 아래 식으로 나타낼 수 있음

$$V_{t-1} = V_{t-1}^{Exo} + V_{t-1}^{Endo} = V_{t-1}^{Exo} + \frac{y_t^{Endo} + V_t^{Endo}}{1 + r_t}$$

- Exo 는 기업의 최적화 문제 내 외생적인 금융 부분을 나타내며, $Endo$ 는 내생적인 운영 잉여(operational surplus)를 나타냄

2) 소득 유량, 금융자산 그리고 부채

- 소득 유량의 일부는 생산에서 발생한 부가가치가 아니라 부채 D 를 금융자산 A 로 나눈 금융 객체(financial object) 보유분에서 발생함
 - 기업 내 유동금융자산 A 는 금융 마찰이 없기 때문에 시장에서 자유롭게 거래될 수 있으며, 이로 인해 현재의 시장 가격으로 평가됨
 - 그뿐만 아니라 기업은 양(+) 혹은 음(-)의 유동금융자산을 보유하여 비용 없이 주주에게 유동금융자산을 차입하여 지불할 수 있기에 신규 주식을 발행하거나 기존 주식을 다시 구입하는 것과 같은 효과를 가짐
 - 따라서 유동금융자산 A 에 포함된 모든 자산은 자기자본 요구수익률을 얻으며 기업이 보유한 모든 주식이 이에 해당됨
- 기업은 현금 외 기타 저수익 금융상품을 보유하고 있으며, 이러한 자산의 경우 기업 외부 자산의 가치가 기업 내부 수익의 할인된 명목 가치보다 높음
 - 위와 같이 회계처리를 하면 편익수익률의 가치가 무시되기 때문에 기업이 저수익 금융상품을 보유하게 되며, 편익수익률을 수정하면 기업 내부의 모든 자산은 시장 가치로 평가되어 기업의 운영 측면에서 분리할 수 있음
 - 비금융회사는 상당 수준의 현금을 보유하며, 투자 펀드는 자산 포트폴리오의 리스크 관리를 위해 채권 및 저수익 금융상품을 보유함
- 기업이 발행한 부채는 음(-)의 값을 가진 자산과는 다른 방식으로 모형화됨
 - 기업 부채의 주요 구성 요소 중 하나는 담보대출로 기업의 자본스톡과 밀접한 관련이 있으며, 기업 부채는 간접적으로 건물 및 기계에 대한 소유권 역할을 하는 다양한 계약(설치 자본의 판매 금지 등)과 함께 발행됨
 - 부채는 기업이 보유한 자본스톡의 함수로 내생적이며, 자산 A_t 는 외생적임
 - 위와 같은 이유로 기업 부채는 기업의 자본스톡에 비례하며, 기업 부채 모형화 방법은 모형 내 가계 부문의 담보 부채 모형화 방식과 유사함

$$D_t = \mu_t^D p_t^I K_t$$

- μ_t^D 는 기업에 외생적인 부채 요인으로, 이는 수정된 모딜리아니 밀러 정리(Modigliani-Miller theorem) 기반으로 산출되며 μ_t^D 는 0.4로 동일하게 적용

3) 소득 유량: 수입 및 비용

□ 기업에 의해 발생한 수입 및 비용에 대한 세부 내용은 아래와 같음

- 자산 A 는 명목 수익과 세제 혜택을 구분하기 위해 주식 A^S 와 채권 A^B 로 구분하며, 이를 기준으로 소득은 아래 식으로 나타냄

$$P_t^Y Y_t + r_t^S A_{t-1}^S + r_t^B A_{t-1}^B + A_{t-1} - A_t + D_t - (1 + r_t^D) D_{t-1}$$

- 법인세 감가상각비 면제는 아래 식과 같으며, 자본은 세금과 연동되어 평가됨

$$\tau_t \delta_t^{Tax} K_{t-1}^{Tax}$$

- 임금 지불, 투자 비용, 중간재 비용, 근로세 및 자본세(τ_t^L , τ_t^K), 비법인세 혹은 이전지출 T 등의 객체는 기업의 자원을 소모하며 아래 식으로 나타냄

$$\hat{w}_t L_t + P_t^I I_t + P_t^R R_t + \tau_t^K P_t^I K_{t-1} + T_t$$

- \hat{w}_t 는 자영업자를 제외한 근로자에 대한 고용세로 $\omega_t + \omega_t \tau_t^L (1 - r_t^{self})$ 로 나타내며, r_t^{self} 은 자영업자 비율임

- 법인세 과세 이전 수입을 임시로 도출하면 아래 식과 같음

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= P_t^Y Y_t + D_t - (1 + r_t^D) D_{t-1} + \tau_t \delta_t^{Tax} K_{t-1}^{Tax} \\ &\quad + r_t^S A_{t-1}^S + r_t^B A_{t-1}^B + A_{t-1} - A_t \\ &\quad - \hat{w}_t L_t - P_t^I I_t - P_t^R R_t - \tau_t^K P_t^I K_{t-1} - T_t \end{aligned}$$

- 자산 A 는 기업의 최적화 문제에 외생적이며, 주주와 관련된 수입을 위해서 법인세 τ_t 의 과세 범위에 대한 정의가 필요함

4) 이자, 세금, 유무형 자산의 감가상각비 차감 전 이익(Earnings Before Interest, Tax, Depreciation and Amortization, EBITDA)

□ 법인세 τ_t 의 범위를 정의하기 위해 EBITDA 및 세전이익(Earning Before Tax, EBT)이 기업의 소득으로 어떻게 변환되는지 살펴볼 필요가 있음

- EBITDA는 생산에서 임금 및 중간재 비용 그리고 순 생산세를 차감하여 산출함

$$EBITDA_t = P_t^Y Y_t - w_t L_t - P_t^R R_t - T_t^{NP}$$

- 순 생산세는 토지세, 차량중량세, 급여세 등 세제의 집합이며 각 세제는 기업 변수의 함수 형태로 모형화됨
 - 토지세는 기업이 보유한 자본 건축물 K_b 를 활용하여 산출되며, 차량중량세와 급여세는 각각 기계 자본재 K_m 와 고용 L_t 기반의 함수로 산출됨

$$T_t^{NP} = \underbrace{\tau_{b,t}^k P_{b,t}^I K_{b,t-1}}_{T_t^{Land}} + \underbrace{\tau_{m,t}^k P_{m,t}^I K_{m,t-1}}_{T_t^{Weight}} + \underbrace{\tau_t^L w_t (1 - r_t^{Self}) L_t}_{T_t^{Payroll}} + T_t^{Rest}$$

- EBITDA는 아래 식으로 나타내며, 아래 식에는 이자 및 유무형 자산의 감가상각 차감이 누락되어 있음

$$EBITDA_t = P_t^Y Y_t - w_t L_t - \underbrace{\tau_t^L w_t (1 - r_t^{Self}) L_t}_{-w_t L_t} - P_t^R R_t - \tau_t^K P_t^I K_{t-1} - T_t^{Rest}$$

- 자본세(τ_t^K)는 자본을 건물이나 기계로 간주할 때 적용 가능한 세제임

5) 세전이익(Earnings Before Tax, EBT)

- EBITDA에 이자 및 유무형 자산의 감가상각을 차감하면 EBT가 산출됨
 - 채권 B 유형의 자산에만 명목 소득에 대한 법인세가 부과됨

$$EBT_t = EBITDA_t - \delta_t^{Tax} K_{t-1}^{Tax} + r_t^B A_{t-1}^B - r_t^D D_{t-1}$$

6) 법인세

- 법인세는 세전이익(EBT)에 법인세율(τ_t)을 곱하여 산출

$$T_t^{VirK} = \tau_t EBT_t$$

- 주주와 관련된 소득 유량 y_t 는 EBT 및 EBITDA를 적용하여 아래 식으로 나타냄

$$y_t = EBITDA_t - T_t^{VirK} - P_t^I I_t + T_t^0 + r_t^S A_{t-1}^S + r_t^B A_{t-1}^B + A_{t-1} - A_t + D_t - (1 + r_t^D) D_{t-1}$$

- T^0 는 기업과 정부 및 기업과 가계 간의 이전 및 기타 영업 비용을 포함함

7) 소득 유량과 동태적 최적화

- 소득 유량 y_t 는 EBITDA, EBT 그리고 법인세율을 적용하여 아래 식으로 나타냄

- 아래 식에서 맨 아래 항에 외생적 일괄 이전 항을 따로 설정한 후 자본 및 조세자본의 운동법칙에 라그랑주 승수를 결합함

$$\begin{aligned}
 y_t = & (1 - \tau_t)[P_t^Y Y_t - \widehat{w}_t L_t - P_t^R R_t - \tau_t^K P_t^I K_{t-1} - T_t^{Rest}] \\
 & + \tau_t[r_t^D D_{t-1} + \delta_t^{Tax} K_{t-1}^{Tax} - r_t^B A_{t-1}^B] - P_t^I I_t \\
 & + r_t^S A_{t-1}^S + r_t^B A_{t-1}^B + A_{t-1} - A_t + D_t - (1 + r_t^D) D_{t-1} \\
 & + T_t^0 + q_t[(1 - \delta_t)K_{t-1} + I_t - K_t] + q_t^{Tax} [(1 - \delta_t^{tax})K_{t-1}^{tax} + P_t^I I_t - K_t^{tax}]
 \end{aligned}$$

- 부채는 자본에 비례한다는 가정($D_t = \mu_t^D P_t^I K_t$)을 기반으로 모형화되며, 자본에 대한 최적화 조건을 달성하기 위해 할인율($\beta_{t+1} = \frac{1}{1 + r_{t+1}}$)의 도함수를 산출함

$$\begin{aligned}
 P_{t+1}^Y \frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_t} = & \tau_{t+1}^K P_{t+1}^I + \\
 & + q_t \frac{(1 + r_{t+1})}{(1 - \tau_{t+1})} - \frac{(1 - \delta_{t+1})}{(1 - \tau_{t+1})} q_{t+1} - \mu_t^D P_t^I \frac{(r_{t+1} - r_{t+1}^D (1 - \tau_{t+1}))}{(1 - \tau_{t+1})}
 \end{aligned}$$

- 위 식에서 우변의 마지막 항은 부채금융(debt financing)으로 인한 이익이 커질수록 자본의 한계생산은 낮아지고, 자본스톡은 증가함을 보여줌

8) 자산과 기업의 가치

- 자산 A 는 주식 A^S 와 채권 A^B 로 구분되며 세부 내용은 아래와 같음

- 주식 A^S 는 비과세 대상으로 주식자산 수익률 $r^S (r^S = r)$ 을 적용하며 채권 A^B 는 과세대상으로 r 보다 낮은 채권자산 수익률 $r^B (r^B < r)$ 을 적용함

$$\frac{-\tau_t[r_t^B A_{t-1}^B] + (1 + r_t^B)A_{t-1}^B - A_t^B}{y_t^{AB}} + \frac{(1 + r_t)A_{t-1}^S - A_t^S}{y_t^{AS}}$$

- 주식 A^S 는 현재 액면가 및 시장가까지 할인되며 횡단성 조건(transversality condition)에 따라 할인 한계는 0까지 확장됨

$$V_{t-1}^{AS} = \frac{y_t^{AS}}{1+r_t} + \frac{1}{1+r_t} \frac{y_{t+1}^{AS}}{1+r_{t+1}} + \dots = A_{t-1}^S$$

- 채권 A^B 는 편의수익률 r_t^{CYB} 이 아래 식을 따르는 경우에만 보유하게 됨

$$r_t^B(1-\tau_t) + r_t^{CYB} = r_t$$

- A^B 를 수정하면 액면가 및 시장가 또한 할인되는데($V_{t-1}^{AB} = A_{t-1}^B$), 이는 A^B 가 거래를 방해하는 마찰이 없는 자산이기에 적용 가능한 평가방법임
 - 마찰이 없다는 것은 현금, 금, 예금, 채권, 주식 등의 보유 자산과 배당, 주식 발행 또는 자사주 매입은 서로 완벽한 대체재라는 것을 의미함

- 자산 A_t 가 성장하면 기업의 가치 또한 비례적으로 성장하며, 기업의 가치 V_{t-1} 는 내생적 운영잉여에 외생적 자산의 액면가를 합산한 것으로 정의함

$$V_{t-1} = \frac{y_t + V_t}{1+r_t} = V_{t-1}^{Exo} + V_{t-1}^{Endo} = \underbrace{A_{t-1}^S + A_{t-1}^B}_{A_{t-1}} + V_{t-1}^{Endo}$$

$$V_{t-1}^{Endo} = \frac{y_t^{Endo} + V_t^{Endo}}{1+r_t}$$

- y_t^{Endo} 는 외생적 운영잉여의 유량으로 아래 식으로 나타냄

$$y_t^{Endo} = (1-\tau_t)[P_t^Y Y_t - \hat{w}_t L_t - P_t^R R_t - \tau_t^K P_t^I K_{t-1} - T_t^{Rest}] + D_t - (1+r_t^D)D_{t-1} + \tau_t[r_t^D D_{t-1} + \delta_t^{Tax} K_{t-1}^{Tax}] - P_t^I I_t + T_t^0$$

- 위 식에는 두 개의 일괄 세제(lump sum tax)가 포함되며, 코드 내에서 부문별 EBITDA를 활용하기에 외생적 운영잉여 안에 $T_{sp,t}^{Rest}$ 또한 포함됨
- 이전지출 T^0 는 모든 부문에서 집계되나 경제의 총 잉여 수식에만 활용됨

라. 에너지 추출 부문

- 에너지 추출 부문은 석유 및 가스 그리고 소량의 자갈 추출로 구성되며 세부 내용은 아래와 같음
 - 해당 부문의 산출물 및 가격은 외생적이며, 덴마크 에너지청(Energistyrelsen)의 전망을 기반으로 함
 - 외생적 산출물이 주어지면 생산 요인은 비용 최소화를 위해 내생적으로 선택되며, 가산세를 제외하고 다른 부문과 동일한 방식으로 모형화됨

$$\tau_t = \tau_t^{selvskab} + \frac{y_t - y_t^{gravel}}{y_t} \tau_t^{oil}$$

- 국내의 에너지 추출 산출물에 대한 모든 수요는 공급과 일치하도록 비례적으로 조정되며, 수입에 대한 모든 수요는 외생화된 부문별 산출물에 의존하지 않도록 반비례적으로 조정됨
- 즉, 에너지 추출에 대한 국내 생산과 수입은 완전한 대체재이며, 국내 산출물은 일부 수요에 할당하고, 그 외 잔여 수요는 수입에 할당함

마. 주거 부문

- 국민계정상의 주거 부문은 주택이 주요 투입물인 주택 서비스를 생산하며 세부 내용은 아래와 같음
 - 주거 부문은 임대주택과 개인 소유 주택을 포함함. 주택의 임대 가치로 가격이 책정된 균질한 재화를 생산하며, 개인 소유 주택의 임대료 가치는 임대주택의 임대료를 기준으로 산출됨
 - 모형 내에서 개인 소유 주택에 대한 결정은 가계에 의해 내생적으로 이뤄지는 반면 임대주택은 외생적으로 이뤄짐
 - 임대시장은 모형화되지 않기에 임대주택의 소비와 생산은 모두 외생적으로 이뤄지며, 임대주택의 재고는 정부의 임대주택 계획을 기반으로 함
- 임대주택은 외생적으로 이뤄지기에 개인 소유 주택과 분리하여 접근해야 하며, 이를 위해 레온티에프(Leontief) 함수를 적용하여 주택 서비스 부문의 생산을 구성함

- 주택 서비스의 주요 투입물은 주택 재고로 전체 투입물 중 약 75%를 차지하고 있으며, 기계 자본의 투입은 없고, 토지는 제외됨
- 이 외에 노동 및 중간재를 포함하는 주택 유지 관리(약 15%)와 주로 금융 서비스로 구성된 기타 서비스(약 10%)로 구성되어 있기에 경제의 투입물-산출물 구조 내에서 생산 부문으로 구성됨
- 자본(건물), 노동 그리고 원자재까지 세 가지 투입물은 레온티에프 생산함수를 통해 산출물로 변환되며, 결과적으로 산출물과 고용 그리고 원자재는 자본스톡에 비례함
 - 여타 민간 부문의 생산과 달리 주거 부문은 자본에 대한 조정 비용이 없기 때문에 순 생산과 총 생산이 동일함
 - 주거 부문 내 산출물, 고용 등은 모두 자본스톡에 비례하기 때문에 개인 소유 주택 및 임대주택의 외생적 비율을 적용하여 투입물과 산출물을 분리할 수 있음
 - 또한 개인 소유 주택과 임대주택에 동일한 레온티에프 생산함수를 적용한다고 가정하기에, 자본스톡에 비례하여 동일한 양의 원자재와 노동력을 투입함

1) 문제의 수식화

- 순 산출물 Y_t 를 산출하기 위해 건물 K , 노동 L , 그리고 원자재 R 이 사용됨

$$Y_t = Q_t(K_{t-1}, R_t, L_t) = \min\left(\frac{\phi_k}{\phi_R} R_t, \min\left(\phi_k K_{t-1}, \frac{\phi_k}{\phi_l} L_t\right)\right)$$

- 레온티에프 함수에서는 $Q_t = \phi_k K_{t-1}$, $L_t = \phi_l K_{t-1}$ 그리고 $R_t = \phi_R K_{t-1}$ 임
- 자본스톡 K_t 및 관련 투자는 데이터상 연도에 외생적이며, 전망 시 개인 소유 주택은 내생적으로 이뤄지나 임대주택은 외생적으로 이뤄짐
- 임대주택의 경우 산출물, 고용 그리고 중간재 사용은 외생적임. 개인 소유 주택은 내생적이며 레온티에프 구조로 인해 자본스톡에 비례함
- 이윤에 대한 정의 및 문제에 대한 1계 조건에서 토빈의 q 및 q_t^{Tax} 등과 같이 다양한 보조 가격(auxiliary prices)이 결정됨

2) 가계 문제와의 연계

- 개인 소유 주택에서 임대주택을 분리시킬 때, 가계 문제에서와 다르게 임대주택은 가계의 예산제약하에서 외생적으로 산출되며, 개인 소유 주택은 모형 내에서 최적화 결정을 통해 산출됨
 - 개인 소유 주택은 중개인에게 구매하며, 중개인은 건설 부문에서 토지 및 주택이 결합된 최종 결합 재화를 가져와 가계에 판매함. 임대주택은 토지가 제외됨
 - 가계가 구입한 주택에서 토지의 부가가치를 제거하면 임대주택이 확보되며, 이후 기존 임대주택과 결합하면 주택 서비스 부문 데이터상의 규모와 일치함
- 가계 문제에서 예산제약하에서의 주택관리 비용을 나타내는 항 $x_t D_{t-1}^D D_{a-1,t-1}$ 이 존재함
 - 위 항에서 요인 x_t 는 가계에 의해 주어지며, 개인 소유 주택에 할당된 인건비 및 원자재비인 $[P_t^R \phi_R + \hat{w}_t \phi_l]$ 에 대한 비율임
- 가계는 개인 소유 주택의 소유자로서 주택관리 비용을 직접 지불하며, 부문별 임대주택 관련 수익의 일부는 기업의 소유권을 통해 가계의 자산 포트폴리오에 할당됨
 - 가계가 임대주택의 외생적 수량만큼 소비 및 임대료 지불이 통제됨을 의미함

바. 부록

1) 비용 최소화

- (하위 가지) CES 나무의 하위 가지에서 기업은 기계 자본재 $K_{iM',sp,t}$ 와 노동 $q_{sp,t}^L$ 중에서 하나를 선택함
 - 노동에 대한 1계 조건은 다음과 같이 시작함

$$z^l L = \mu^l Q \left(\frac{P}{p^l} z^l \right)^\eta$$

- 코드상 노동에 대한 1계 조건을 표현하면 아래 식과 같음

$$\underbrace{(1 - r_t^{Op\text{slag}Om\text{k}})}_{z_{sp,t}^L} \underbrace{f_{sp,t}^{Prod} r_{sp,t}^{LUdn}}_{L} = \underbrace{f_{sp,t}^{KL} \mu_{sp,t}^L}_{\text{Share}} \underbrace{Q_{sp,t}^{KL}}_{\text{Scale}} \left(\frac{P_{sp,t}^{KL}}{P_{sp,t}^L} z_{sp,t}^L \right)^{e_{sp}^{KL}}$$

- 우변은 척도 모수(scale parameter)이며, 가중치 모수(share parameter) $\mu_{sp,t}^L$ 와 중첩구조 내 총 요소생산성을 조정하는 항 $f_{sp,t}^{KL}$ 로 구성됨
- 좌변은 노동증대생산성(labor augmenting productivity) $f_{sp,t}^{Prod}$, 노동 활용(labor utilization) 혹은 노력(effort) 변수 $r_{sp,t}^{LUdn}$ 을 포함함
- 고용 프로세스 $r_t^{OpslagOmk}$ 을 관리하는 동안 생산에 활용된 고용은 생산 중 발생한 노동 손실의 비율을 활용하여 산출함
- $P_{sp,t}^L$ 는 노동의 사용자비용이며 노동은 시간당 효율성 단위로 측정됨

○ 기계 자본재는 아래 식으로 나타냄

$$\frac{1}{f^q} q_{iM',sp,t}^K r_{iM',sp,t}^{KUdn} = \underbrace{f_{sp,t}^{KL} \mu_{iM',sp,t}^K}_{Scale} Q_{sp,t}^{KL} \left(r_{iM',sp,t}^{KUdn} \frac{P_{sp,t}^{KL}}{P_{iM',sp,t}^K} \right)^{e_{sp}^{KL}}$$

- $P_{iM',sp,t}^K$ 는 기계 자본의 사용자비용이며, $r_{iM',sp,t}^{KUdn}$ 은 자본 비율의 활용임
- 요인 f^q 는 모형 내 지연된(lagged) 수량에 대한 성장 보정 요인(growth correction factor)이며, e_{sp}^{KL} 는 하위 가지 내 대체탄력성으로 부문별로 다양함
 - 탄력성 추정치는 Kronborg et al.(2020)의 결과를 활용하여 0.1로 설정하며, 생산 부문은 0.51, 서비스 부문은 0.42 그리고 에너지 추출은 0.33으로 설정함

□ (중위 가지) CES 나무의 중위 가지에서 기업은 건물 자본재 $K_{iB',sp,t}$ 와 노동 및 기계자본 총량 $Q_{sp,t}^{KL}$ 중 하나를 선택하며, 모형 내 수요 방정식은 아래 식과 같음

$$\frac{1}{f^q} q_{iB',sp,t}^K r_{iB',sp,t}^{KUdn} = \underbrace{f_{sp,t}^{KLB} \mu_{iB',sp,t}^K}_{Scale} Q_{sp,t}^{KLB} \left(r_{iB',sp,t}^{KUdn} \frac{P_{sp,t}^{KLB}}{P_{iB',sp,t}^K} \right)^{e_{sp}^{KLB}}$$

$$Q_{sp,t}^{KL} = \underbrace{f_{sp,t}^{KLB} \mu_{sp,t}^{KL}}_{Scale} Q_{sp,t}^{KLB} \left(\frac{P_{sp,t}^{KLB}}{P_{sp,t}^{KL}} \right)^{e_{sp}^{KLB}}$$

○ $P_{iB',sp,t}^K$ 는 건물 자본의 사용자비용, $P_{sp,t}^{KL}$ 는 노동 및 기계 자본에 대한 CES 물가지수이며, 탄력성은 0.1, 에너지 추출 부문은 1.57로 예외적으로 설정함

□ (상위 가지) 기업은 원자재 $q_{sp,t}^R$ 와 총량 $Q_{sp,t}^{KLB}$ 중 하나를 선택함

$$q_{sp,t}^R = \underbrace{f_{sp,t}^{KLBR} \mu_{sp,t}^R}_{Scale} Q_{sp,t}^{KLBR} \left(\frac{P_{sp,t}^{KLBR}}{P_{sp,t}^R} \right)^{e_{sp,t}^{KLBR}}$$

$$Q_{sp,t}^{KLB} = \underbrace{f_{sp,t}^{KLBR} \mu_{sp,t}^{KLB}}_{Scale} Q_{sp,t}^{KLBR} \left(\frac{P_{sp,t}^{KLBR}}{P_{sp,t}^{KLB}} \right)^{e_{sp,t}^{KLBR}}$$

- $P_{sp,t}^R$ 및 $P_{sp,t}^{KLB}$ 는 원자재와 KLB21) 총량에 대한 부문별 CES 물가지수이며, $P_{sp,t}^{KLBR}$ 는 전역적 최적화 가격(global optimization price)임
- Kronbor, A(2020)의 추정치를 활용하여 대체탄력성 $e_{sp,t}^{KLBR}$ 는 제조 부문(0.53)과 건설 부문(0.41)을 제외하고 전부 0.1로 설정함

□ (총비용 항등식) 비용 최소화는 수요함수와 각 총비용 항등식을 활용하여 해결함

$$P_{sp,t}^{KL} Q_{sp,t}^{KL} = P_{sp,t}^L q_{sp,t}^L + P_{iM',sp,t-1}^K q_{iM',sp,t-1}^K$$

$$P_{sp,t}^{KLB} Q_{sp,t}^{KLB} = P_{iB',sp,t-1}^K q_{iB',sp,t-1}^K + P_{sp,t}^{KL} Q_{sp,t}^{KL}$$

$$P_{sp,t}^{KLBR} Q_{sp,t}^{KLBR} = P_{sp,t}^R q_{sp,t}^R + P_{sp,t}^{KLB} Q_{sp,t}^{KLB}$$

- $P(P_{sp,t}^{KLBR})$ 는 산출물을 한 단위 더 생산하는 데 필요한 한계비용이며, $P_{sp,t}^R$ 는 원자재의 물가지수, $P_{sp,t}^L$ 는 노동의 사용자비용임

2) 동태적 최적화

□ (조정/설치 비용) 아래 식으로 나타냄

$$\frac{\gamma}{2} K_{t-1} \left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \xi_t \frac{I_{t-1}}{K_{t-1}} \right)^2$$

- 코드상 위의 식을 표현하면 아래 식과 같음

$$\frac{\mu_{k,sp}^{KInstOmk}}{2} q_{k,sp,t-1}^K \left(\frac{q_{k,sp,t}^I - f_{k,sp,t}^{KInstOmk} q_{k,sp,t-1}^I}{q_{k,sp,t-1}^K} \frac{1}{f^q} \times f^q \right)^2$$

21) KLB는 자본(Kapital), 노동(Labor) 그리고 건물 자본재(Building)를 의미함

- 캘리브레이션 시 $\xi_t (f_{k,sp,t}^{KInstOmk} = f^q \times q_{k,sp,t}^I / q_{k,sp,t-1}^I)$ 로 나타내며 실적치에서 조정 비용은 0이 되도록 설정하고, 전망에서는 $\xi = 1 + g$ 로 나타냄
- g_t 는 노동증대적 균제상태 성장률(Harrod neutral steady state growth rate)임
- 조정 비용에 대한 수준 모수 $\gamma(\mu_{k,sp}^{KInstOmk})$ 는 시간에 독립적이며 데이터상에서의 투자에 대한 동태적 적률(dynamic moments)과 일치되게 추정됨

□ (순 산출물) 아래 식으로 나타냄

$$Y_t = Q_t(u_t K_{t-1}, R_t, L_t) - \frac{1}{2} \gamma K_{k,t-1} \left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \xi_t \frac{I_{t-1}}{K_{t-1}} \right)^2$$

○ 코드상 위의 식을 표현하면 아래 식과 같음

$$q_{sp,t}^Y = q_{sp,t}^{KLBR} - q_{k,tot',sp,t}^{KInstOmk}$$

□ (자본세의 1계 조건) 아래 식으로 나타냄

$$q_t^{Tax} = \frac{q_{t+1}^{Tax} (1 - \delta_{t+1}^{Tax}) + \tau_{t+1} \delta_{t+1}^{Tax}}{(1 + r_{t+1})}$$

○ 코드상 위의 식을 표현하면 아래 식과 같음

$$Er_{k,sp,t}^{SkatAfskr} = \frac{Er_{k,sp,t+1}^{SkatAfskr} (1 - r_{k,sp,t+1}^{SkatAfskr}) + \tau_{t+1} r_{k,sp,t+1}^{SkatAfskr}}{1 + r_{t+1}^{VirKDisk}}$$

□ (투자의 1계 조건) 투자, 즉 토빈의 q는 아래 식으로 나타냄

$$q_t = P_t^I (1 - q_t^{Tax}) + P_t^Y (1 - \tau_t) \gamma_t \left(\frac{I_t}{K_{t-1}} - \xi_t \frac{I_{t-1}}{K_{t-1}} \right) - \frac{\xi_{t+1}}{1 + r_{t+1}} P_{t+1}^Y (1 - \tau_{t+1}) \gamma_{t+1} \left(\frac{I_{t+1}}{K_t} - \xi_t \frac{I_t}{K_t} \right)$$

○ 코드상 위의 식을 표현하면 아래 식과 같음

$$P_{k,sp,t}^{TobinsQ} = P_{k,sp,t}^I (1 - Er_{k,sp,t}^{SkatAfskr}) + P_{sp,t}^{KLBR} (1 - t_t^{ScIskab}) \mu_{k,sp}^{KInstOmk} \left(\frac{q_{k,sp,t}^I - f_{k,sp,t}^{KInstOmk} q_{k,sp,t-1}^I}{q_{k,sp,t-1}^K} \times f^q \right)$$

$$-\frac{f^{KInstOmk}}{1+r_{t+1}^{VirKDisk}} P_{sp,t+1}^{KLBR} (1-t_{t+1}^{Selskab})$$

$$\times \mu_{k,sp}^{KInstOmk} \left(\frac{f^q \times q_{k,sp,t+1}^I - f_{k,sp,t+1}^{KInstOmk} q_{k,sp,t}^I}{q_{k,sp,t}^K} \right)$$

- 토빈의 q 는 실질 수량 K 에 대한 가격이자 라그랑주 승수이기 때문에 $P^{TobinsQ}$ 로 나타내며, q_t^{Tax} 는 명목 수량 K^{Tax} 에 대한 라그랑주 승수로 토빈의 q 에서의 가격과 동일한 개념이 아니기에 $Er_{k,sp,t}^{SkatAfskr}$ 로 나타냄

□ (자본의 사용자비용) 아래 식으로 나타냄

$$q_t \frac{1+r_{t+1}}{(1-\tau_{t+1})} - q_{t+1} \frac{(1-\delta_{t+1})}{(1-\tau_{t+1})} + \tau_{t+1}^K P_{t+1}^I$$

$$- \frac{(r_{t+1} - r_{t+1}^{Debt}(1-\tau_{t+1}))}{(1-\tau_{t+1})} \mu_t^{Debt} P_t^I = P_{t+1}^K - P_{t+1}^Y \frac{\partial AC_{t+1}}{\partial K_t}$$

○ 코드상 위의 식을 표현하면 아래 식과 같음

$$P_{k,sp,t}^{TobinsQ} \frac{1+r_{t+1}^{VirKDisk}}{1-t_{t+1}^{Selskab}} - f^p P_{k,sp,t+1}^{TobinsQ} \frac{(1-r_{k,sp,t+1}^{Afskr})}{1-t_{t+1}^{Selskab}} +$$

$$+ t_{k,sp,t+1}^K P_{k,sp,t+1}^I - \left(\frac{r_{t+1}^{VirKDisk} - (1-t_{t+1}^{Selskab})r_{t+1}^{Rente}}{1-t_{t+1}^{Selskab}} \right) r_t^{Laan2K} P_{k,sp,t}^I$$

$$= f^p \underbrace{P_{k,sp,t+1}^K}_{user\ cost\ of\ k} + f^p P_{sp,t+1}^{KLBR} \frac{\mu_{k,sp}^{KInstOmk}}{2} \left(\frac{f^q q_{k,sp,t+1}^I - f_{k,sp,t+1}^{KInstOmk} q_{k,sp,t}^I}{q_{k,sp,t}^K} \right)^2$$

- 객체는 대부분 자본의 유형 k , 부문 sp , 연도 t 의 속성으로 구분되는데 이는 법인세 $\tau_t(\mu_{k,sp}^{KInstOmk})$ 는 예외로 경제 전반에 걸쳐 적용되는 객체이며 주식투자자의 선호도가 반영된 기업의 할인율이기 때문임
- 자본구조 부채 모수 $\mu_t^{Debt}(\mu_{k,sp}^{KInstOmk})$ 는 자본의 유형 k , 부문 sp 의 속성으로 구분되지 않으며, 기업의 부채비율은 $\mu_t^{Debt} = \alpha_t^{Mortgages2K} + \lambda_t^{firmDebt}$ 로 나타내고, $\lambda_t^{FirmDebt}$ 는 0.4로 설정함

□ (생산 요인 가동률) 세부 내용은 아래와 같음

- (개념) 생산 요인 가동률은 근로자당 경기 순행적 부가가치를 산출하는 데 활용됨
 - 자본 경직성으로 인한 전 부문 모든 생산 요인에 걸쳐 감소하는 수익에 대응하기 위해 총요소생산성을 증가시키는 메커니즘을 활용함
 - 아래 식에 의해 주어진 X_t 의 최적 선택에 대한 1계 조건과 $Q_t = Q(u_t X_t)$ 형태의 함수를 활용하여 기업이 총 산출물을 갖게 함
 - 아래 식은 X_t 의 사용자비용을 정의함

$$P_t \frac{\partial Q_t}{\partial (u_t X_t)} u_t = P_t^X$$

- 생산 요인 가동률 u_t 는 보조 저장 변수 x 와 연계됨
 - x 는 $(u_t - 1)X_t + \lambda_t x_{t-1}$ 형태의 운동법칙을 따르며, λ_t 는 $\lambda_0 \bar{u}_{t-1}^{-\theta} / \beta_t$ 이고 \bar{u}_t 는 균제상태에서 u_t 와 동일한 외생적 항임
 - 위의 운동법칙은 $x = 0$ 및 $u = 1$ 에서 균형상태의 해를 가지며, u_t 의 선택을 저장 x_t 의 선택으로 대체하고 극한 조건 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = 0$ 을 부과함
- 외생적 항에 대칭적 균형을 적용하고 시점을 1기 지연시켜 생산 요인 가동률에 대한 동태적 1계 조건을 아래 식으로 나타냄

$$u_t = \lambda_0 u_{t-1}^{1+\theta} \frac{P_t^X}{P_{t-1}^X}$$

- (자본) 두 유형의 자본에 대한 생산 요인 가동률에 관계(relationship)를 추가함

$$u_t = u_{t-1}^\lambda \left(\frac{P_t^K}{u_t} \frac{u_{t+1}}{P_{t+1}^K} \right)^\eta \left(\frac{P_{t-1}^K}{u_{t-1}} \frac{u_t}{P_t^K} \right)^{-\eta}$$

- (노동) 생산 요인 가동률에 대한 수식에서 노동은 노력(effort)의 개념에 보다 가까우며 노동 투입물의 성격이 다르기에 수식에서 노동을 다르게 나타냄
 - 객체 L 은 기술과 생산성을 설명하는 다양한 구성 요소를 포함하며, 생산 요인 가동률은 근로자 수를 포함한 모든 구성 요소를 포함함
 - 편의상 객체 L 에는 생산 요인 가동률 또한 포함되기에 한계생산물 $\frac{P_t \partial Q_t}{\partial L}$ 인 P^L

항을 사용하며, 생산 요인 가동률의 1계 조건은 아래 식과 같음

$$P_t^L \frac{\partial L_t}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial x_t} + \beta P_{t+1}^L \frac{\partial L_{t+1}}{\partial u_{t+1}} \frac{\partial u_{t+1}}{\partial x_t} = 0$$

- 위의 식에 $X = L/u$ 와 $\partial L_t / \partial u_t = L/u$ 를 적용하여 아래 식을 산출함

$$P_t^L \frac{L_t}{u_t} \frac{1}{\frac{L_t}{u_t}} - \beta P_{t+1}^L \frac{L_{t+1}}{u_{t+1}} \frac{1}{\frac{L_{t+1}}{u_{t+1}}} \lambda_0 \frac{u_t^{-\theta}}{\beta} = 0$$

- 위 식을 활용하여 아래 식을 도출함

$$P_t^L = P_{t+1}^L \lambda_0 u_t^\theta$$

- 위 과정을 거쳐 도출된 생산 요인 가동률 u_t 의 일반화된 수식은 아래와 같음

$$u_t = u_{t-1}^\lambda \left(\frac{P_t^L}{P_{t+1}^L} \right)^\eta \left(\frac{P_{t-1}^L}{P_t^L} \right)^{-\eta}$$

□ (레온티에프 문제) CES 문제를 먼저 해결한 후 2개의 투입물을 가진 레온티에프 문제를 단일 투입물의 선형 기술 문제로 변환하고, CES 문제의 극한에서 얻은 것과 동일한 최적의 조건을 도출함

○ (CES 문제) 기업의 운영잉여 π 에 CES함수를 적용하면 아래 식과 같음

$$\pi = p_t \underbrace{\left[\sum_{i=1}^2 (\mu_i)^{\frac{1}{E}} (u_{i,t} X_{i,t})^{\frac{E-1}{E}} \right]^{\frac{E}{E-1}}}_Q - \sum_{i=1}^2 \left(w_{i,t} X_{i,t} + \frac{\gamma_i}{1+\theta} X_{i,t}^{1+\theta} \right)$$

- $\theta > 0$ 이며 탄력성은 $E > 0$ 이고, 산출물 Q 의 가격 p 는 주어짐

- X 에 대한 1계 조건은 사용자비용 변수 p_i 를 정의함

$$p_t \frac{\partial Q_t}{\partial X_{i,t}} = p_t \left(\frac{\mu_i Q_t}{u_{i,t} X_{i,t}} \right)^{\frac{1}{E}} u_{i,t} = p_{i,t} = w_{i,t} + \gamma_i X_{i,t}^\theta$$

- 위의 1계 조건에 X_i 를 곱하여 아래 식을 산출함

$$p_t \left(\frac{\mu_i Q_t}{u_{i,t} X_{i,t}} \right)^{\frac{1}{E}} u_{i,t} X_{i,t} = p_{i,t} X_{i,t}$$

- 이후 예산제약 수식을 산출하기 위해 1계 조건을 모두 합산함

$$p_t Q_t^{\frac{1}{E}} \left[\sum_i \mu_i^{\frac{1}{E}} (u_{i,t} X_{i,t})^{\frac{E-1}{E}} \right] \equiv p_t Q_t = \sum_i p_{i,t} X_{i,t}$$

- 편미분이 존재하지 않기에 1계 조건은 레온티에프 문제에 직접적으로 적용할 수 없으며 1계 조건에 역수를 취하여 수요함수로 변환함

$$u_{i,t}^{1-E} X_{i,t} = \mu_i Q_t \left(\frac{p_{i,t}}{p_t} \right)^{-E}$$

- 아래 식은 레온티에프 문제에 대한 해의 일부임

$$u_{i,t} X_{i,t} = \mu_i Q_t$$

○ (레온티에프 문제) 레온티에프 문제 내에는 꺾인 점(kink)이 상시 존재하며, $u_1 X_1 / \mu_1 = u_2 X_2 / \mu_2$ 로 나타냄

- 기업의 운영잉여 π 를 도출하기 위해 X_1 항의 산출물을 아래 식으로 나타냄

$$\pi = p_t \frac{u_{1,t} X_{1,t}}{\mu_1} - w_{1,t} X_{1,t} - \frac{\gamma_1}{1+\theta} X_{1,t}^{1+\theta} - w_{2,t} \frac{u_{1,t} X_{1,t}}{\mu_1} \frac{\mu_2}{u_{2,t}} - \frac{\gamma_2}{1+\theta} \left(\frac{u_{1,t} X_{1,t}}{\mu_1} \frac{\mu_2}{u_{2,t}} \right)^{1+\theta}$$

- 이후 X_1 에 대한 1계 조건을 취하면 아래 식과 같음

$$0 = p_t \frac{u_{1,t}}{\mu_1} - p_{1,t} - w_{2,t} \frac{u_{1,t}}{\mu_1} \frac{\mu_2}{u_{2,t}} - \gamma_2 \left(\frac{u_{1,t}}{\mu_1} \frac{\mu_2}{u_{2,t}} \right)^{1+\theta} (X_{1,t})^\theta$$

- 1계 조건에 X_1 을 곱한 후 수식을 수정하여 아래 식, 즉 예산제약을 도출함

$$0 = p_t Q_t - p_{1,t} X_{1,t} - p_{2,t} X_{2,t}$$

- CES 문제의 마지막 단계는 CES 수요함수의 극한을 나타내는 것임

$$u_{i,t}^{1-E} X_{i,t} = \mu_i Q_t \left(\frac{p_{i,t}}{p_t} \right)^{-E}$$

- 위 과정을 거쳐 레온티에프 수식을 산출함

$$u_{i,t} X_{i,t} = \mu_i Q_t$$

- 두 개의 수식(for $i = 1, 2$)은 꺾인 점에서 선형 문제로서 레온티에프 문제를 수식화하는 데 사용됨
- p_i 를 정의한 후 수요함수로서 1계 조건을 재작성하고 예산제약을 부과하여 아래 식을 도출함

$$0 = p_i Q_t - p_{1,t} X_{1,t} - p_{2,t} X_{2,t}$$

- (예산제약) 아래 식은 주어진 산출물의 가격을 사용하여 정의되므로 내연적으로 Q 를 해결할 수 있음

$$0 = p_i Q_t - p_{1,t} X_{1,t} - p_{2,t} X_{2,t}$$

- 그러나 전체 문제의 나무 위에서 수량 Q 가 결정되는 CES 나무에 레온티에프 문제가 포함되어 있는 경우, CES 가격 $p_i(p_{1,t}, p_{2,t})$ 에 대해서도 정확히 동일한 레온티에프 문제가 해결됨

- (데이터 및 캘리브레이션) CES 구조상의 관련 가중치 모수를 캘리브레이션하여, 기계 및 건물뿐만 아니라 원자재 및 노동 등의 투입물을 ADAM 데이터뱅크상의 국민계정 데이터와 일치시킴

- Q^{KL} 및 Q^{KLB} 함수의 가중치 모수는 CES 가격과 일치되도록 보정하며, P^{KL} , P^{KLB} 는 국민계정에서 사용하는 파셰 연쇄지수 가격(Pasche chain index price)과 일치되도록 보정함

- 객체 Q^{KL} , Q^{KLB} , Q^{KLBR} 내 보정 모수 $f_{sp,t}^{KLBR}$ 등은 모형 내에서 확인이 불가능하기 때문에 1로 설정하며, 각 CES 중첩구조 내 가중치 모수 합이 1이 되도록 캘리브레이션함

- 노동 투입물은 ADAM 데이터뱅크상의 국민계정을 활용하여 계산함

- 각 부문별 명목 노동 투입물은 지급된 명목 임금총액에 계산된 자영업자의 임금총액을 합산하여 산출함
- 근로자 및 자영업자의 근로시간은 ADAM의 데이터뱅크를 활용하며, 자영업자의 명목 노동 투입물은 근로자의 시급과 동일하다는 가정하에 계산됨
- 노동은 효율성 단위(efficiency units)로 측정되며, 효율적 노동(efficient labor)의 수량은 지급된 명목 임금총액을 산업근로자의 임금지수로 나눠 산출함
 - 이는 근로자가 기준연도에 1 DDK를 버는데 제공 가능한 노동량을 의미함

- 자본의 사용자비용은 토빈의 q 의 특성 때문에 미래지향적인 객체가 되며, 이는 생산 및 조정비용함수의 보정이 미래 경로에 영향을 미친다는 것을 의미함
 - 위와 같은 이유로 실적치 중심의 데이터를 활용하여 캘리브레이션할 경우 일부 부분에서 투입물 및 산출물 가격에 큰 변동이 생기는 문제점이 발생함
 - 계산된 사용자비용은 간혹 음수로 나타나는데, 본 모형에서는 음(-)의 사용자비용 문제를 풀 수 없기에 캘리브레이션 시 투자 가격 및 감가상각률의 미래 실현값을 호드리크-프레스콧 필터값(Hodrick-Prescott filter)으로 대체함
 - 이 외 모형 내 다른 부분에서 가중치 모수는 통계적으로 캘리브레이션되며 ARIMA를 사용하여 정태적으로 전망됨
- (이자율의 장기적 영향) 주요 내용은 금리 변동이 투자 결정에 미치는 영향으로 1계 조건의 균제상태부터 살펴봄

$$(1 - \tau) \left[P^Y \frac{\partial Y}{\partial K} - \tau^K P^I \right] = q(r + \delta) - [r - r^D + r^D \tau] \mu^D P^I$$

$$q = P^I (1 - q^{Tax}) \equiv P^I \left(1 - \frac{\tau \delta^{Tax}}{(r + \delta^{Tax})} \right)$$

- 우변을 중점으로 위의 식을 재구성하여 아래 식을 산출함

$$RHS \equiv P^I (1 - q^{Tax}) (r + \delta) - [r - r^D + r^D \tau] \mu^D P^I$$

$$\Omega \equiv \frac{RHS}{P^I} - (1 - q^{Tax}) \delta \equiv (1 - q^{Tax} - \mu^D) r + (1 - \tau) r^D \mu^D$$

- 자본수익률($r = r^D + r^p$)을 채권 수익률과 리스크 프리미엄 수익률로 분해하여 아래 식을 산출함

$$\Omega \equiv r^p (1 - q^{Tax} - \mu^D) + r^D (1 - q^{Tax} - \tau \mu^D)$$

- 법인세율은 약 0.25이며, 부채 요인 μ^D 는 0.4로 $q^{Tax} + \tau \mu^D < q^{Tax} + \mu^D < 1$ 임

- 장기 투자 및 자본스톡이 금리 변동에 영향을 받지 않도록 하기 위해 장기 리스크 프리미엄을 조정하여 금리 변동의 장기적 영향을 무효화시킴

$$\frac{RHS}{P^I} \equiv (1 - q^{Tax}) \delta + r^p (1 - q^{Tax} - \mu^D) + r^D (1 - q^{Tax} - \tau \mu^D)$$

- 채권비율 변동에 대응하기 위해 리스크 프리미엄이 이동할 수 있도록 허용하며 아래 식의 값이 일정하게 유지되도록 함

$$q^{Tax} = \frac{\tau \delta^{Tax}}{(r^D + r^p + \delta^{Tax})}$$

사. 코드 내 수식

- 본 모형은 부문별 자본스톡 및 가격을 산출할 수 있는 데이터를 기반으로 작동하며, 내생적 계산에 필요한 데이터의 대부분은 적정 수준으로 세분화되어 있음
- 그러나 일부 객체는 총량 데이터로부터 별도로 계산해야 하며, 반면 금융자산과 같은 일부 객체는 총량 데이터만 활용됨

1) 데이터 가용성

- 기업의 가치는 ADAM의 데이터뱅크상 자본의 가치와 일치하며, 경제 내 존재하는 모든 기업의 총 가치와 동일함
- 법인세율은 총량 데이터를 활용하여 계산하며, 세수 및 과세표준에 대한 가용 데이터로는 법적 법인세율 22%를 산출하지 못하기 때문에 모든 부문에 걸쳐 실효 법인세율을 적용함
- 기업의 부채금융 비율($\mu_t^{Debt} = r_t^{Laan2K}$)과 순 금액만 있는 은행 예적금의 경우 데이터 기반의 캘리브레이션이 불가능함
 - Vækstplan DK(2013)에서는 부채금융 비율을 0.4로 활용하였으며, 본 모형에서는 이를 적용하여 부채금융 비율을 0.4로 설정함

2) EBITDA

- EBITDA는 아래 식으로 나타냄

$$EBITDA_{sp,t} = P_{sp,t}^Y Y_{sp,t} - w_t^h L_{sp,t} - P_{sp,t}^R R_{sp,t} - T_{sp,t}^{NetYAfG}$$

- $P_{sp,t}^Y Y_{sp,t}$ 는 국민소득 및 제품계정(Nationalregnskabet)에서 산출한 생산의 총 가치이며, $w_t^h L_{sp,t}$ 는 자영업자를 포함한 총 임금 비용임

○ $P_{sp,t}^R R_{sp,t}$ 는 원자재 투입물의 비용이며 $T_{sp,t}^{NetYAf}$ 는 순 생산세임

□ 순 생산세 $T_{sp,t}^{NetYAf}$ 는 아래 식으로 나타냄

$$\begin{aligned} \frac{T_{sp,t}^{NetYAf}}{T_t^{NP}} = & \underbrace{t_{iB,sp,t}^K P_{iB,sp,t}^I K_{iB,sp,t-1}}_{T_{sp,t}^{Grund} = T_t^{Land}} + \underbrace{t_{Im,sp,t}^K P_{Im,sp,t}^I K_{Im,sp,t-1}}_{T_{sp,t}^{VirKVaegt} = T_t^{Weight}} + \\ & + \underbrace{t_{sp,t}^L w_t^h (1 - r_{sp,t}^{Selvst}) L_{sp,t}}_{T_{sp,t}^{NetLoenAfg} = T_t^{Payroll}} + \underbrace{T_{sp,t}^{NetYAfRest}}_{T_t^{Rest}} \end{aligned}$$

○ $T_{sp,t}^{Grund}$ 는 명목 총 토지세 수입(grundskyld)이며, $T_{sp,t}^{VirKVaegt}$ 는 명목 총 차량증량세 수입(vægtafgift), $T_{sp,t}^{NetLoenAfg}$ 는 임금총액에 부과된 명목 총 세수인 급여세이며, $T_{sp,t}^{NetYAfResidual}$ 는 기타 순 생산세임

○ 모형에서 활용된 각 세율은 세수에 기반하여 계산되었으며 토지세율 $t_{iB,sp,t}^K$, 증량세율 $t_{Im,sp,t}^K$, 그리고 급여세율 $t_{sp,t}^L$ 등이 해당됨

○ 각 부문별 자영업자의 노동 투입물 비율 $r_{sp,t}^{Selvst}$ 는 데이터에서 직접 얻음

○ 개인 소유 주택의 임대 가치는 국민계정 내 자본수입에 포함되지만 기업에는 포함되지 않기에 주거 부문에서 차감됨

3) EBT

□ EBT는 세분화된 세제 관련 자본스톡 $K_{k,sp,t-1}^{Skat}$ 를 기반으로 계산됨

○ 자본스톡에 대한 세분화된 부채 대비 대출 비율을 산출하기 위해 모든 부문에서 동일한 부채 비율을 가정함

○ 부문별로 분류하지 않은 비세분화 항목은 은행 예금 및 채권자산에 대한 순 이자수입으로 각 부문별 자본스톡에 비례한다고 가정함

□ EBT는 아래 식으로 나타냄

$$\begin{aligned} EBT_{sp,t} = & EBITDA_{sp,t} - \sum_k \delta_{k,t}^{Skat} K_{k,sp,t-1}^{Skat} \\ & + \left[\frac{r_{bank,t}^{Rente} V_{bank,t-1}^{VirK}}{Assets, Net Deposits} + r_{obl,t}^{Rente} V_{obl,t-1}^{VirK} - r_{RealKred,t}^{Rente} V_{RealKred,t-1}^{VirK} \right] \frac{V_{sp,t-1}^{VirKk}}{V_{t-1}^{VirKk}} \end{aligned}$$

- $V_{obl,t-1}^{VirK}$ 를 순 수량(net quantity)으로 정의한 후, 위의 식에서 내연적 기업 부채를 재계산하여 아래 식을 도출함

$$EBT_{sp,t} = EBITDA_{sp,t} - \sum_k \delta_{k,t}^{Skat} K_{k,sp,t-1}^{Skat}$$

$$+ \left[\frac{r_{bank,t}^{Rente} V_{bank,t-1}^{VirK} + r_{obl,t}^{Rente} V_{obl,t-1}^{VirK} + r_{obl,t}^{Rente} r_{t-1}^{OblLaan2K} V_{t-1}^{VirK}}{\text{Net bank deposit plus bonds as assets, } r_t^B A_{t-1}^B, \text{ exogenous to optimization}} \right] \frac{V_{sp,t-1}^{VirKK}}{V_{t-1}^{VirKK}}$$

$$- \left[\frac{r_{obl,t}^{Rente} r_{t-1}^{OblLaan2K} V_{t-1}^{VirKK} + r_{RealKred,t}^{Rente} V_{RealKred,t-1}^{VirK}}{\text{Bonds as liabilities, } r_{obl,t}^{Rente} r_{t-1}^{Laan2K} V_{t-1}^{VirKK} = r_t^D D_{t-1} = r_t^D \mu_t^D P_t^I K_{t-1}, \text{ endogenous}} \right] \frac{V_{sp,t-1}^{VirKK}}{V_{t-1}^{VirKK}}$$

- 순 수량은 자산으로서의 채권에서 계산된 기업 부채를 차감한 것임

- 생산 자본스톡 가치의 총량 V_t^{VirKK} 는 아래 식으로 나타냄

$$V_t^{VirKK} = \sum_k \sum_{sp} P_{k,sp,t}^I K_{k,sp,t} - P_{iB,Bol,t}^I K_t^{Bolg}$$

- V_t^{VirKK} 는 개인 소유 주택 K_t^{Bolg} 를 제외한 모든 민간 부문의 건물 및 기계 자본의 합으로, 위 식은 주거 부문에만 적용되며 주택 외 나머지 부문의 $V_{sp,t}^{VirKK}$ 는 아래 식으로 나타냄

$$V_{sp,t}^{VirKK} = \sum_k P_{k,sp,t}^I K_{k,sp,t}$$

- 기계 자본은 없고 오직 건물만 존재하는 주거 부문은 아래 식으로 나타냄

$$V_{Bol,t}^{VirKK} = P_{iB,Bol,t}^I K_{iB,Bol,t} - P_{Bol,t}^I K_t^{Bolg}$$

- $K_{iB,Bol,t}$ 는 총 주택스톡으로 개인 소유와 임대주택 또한 포함되며, 아래 식은 임대주택스톡을 나타냄

$$K_{iB,Bol,t} - K_t^{Bolg}$$

- 개인 소유 주택스톡 K_t^{Bolg} 는 가계 문제 내에서 내생적으로 결정됨

- 장부 및 세액 자본의 세부 내용은 아래와 같음

- $\delta_{k,t}^{Skat}$ 는 세액공제 목적의 감가상각률이며 $K_{k,sp,t}^{Skat}$ 는 부문 sp , 유형 k 의 자본스톡에 대

한 장부 및 세금 가치임

- 기업은 세액공제 가능한 감가상각률 $\delta_{k,t}^{Skat}$ 수준으로 세제 혜택을 받으며, $\delta_{k,t}^{Skat}$ 는 실제 감가상각률보다 높을 수 있음
- 따라서 세제 혜택이 누적되는 명목 총량(nominal aggregate)이 존재하며, 이를 세액 가치라 부르고 아래 식으로 나타냄

$$K_{Im,t}^{Skat} = (1 - \delta_{Im,t}^{Skat})K_{Im,t-1} + \sum_{sp} P_{Im,sp,t}^I I_{Im,sp,t}$$

$$K_{iB,t}^{Skat} = (1 - \delta_{iB,t}^{Skat})K_{iB,t-1} + \sum_{sp} P_{iB,sp,t}^I I_{iB,sp,t} - P_{iB,Bol,t}^I I_{Tot,t}^{Bolg}$$

- $P_{k,sp,t}^I$ 는 민간 부문 sp , 자본 유형 k 인 투자 가격으로 CES 비용 최소화 결과이며, 수입 투자재와 국내 부문의 투자재의 가격을 합한 것임
- Im 은 기계자본, i_B 는 건물자본 그리고 Bol 은 주거 부문임
- 투자 $I_{k,sp,t}$ 는 관련 CES 수량의 총량이며, 데이터상 주거용 건물과 산업용 건물이 함께 묶여 있기 때문에 가계의 총 주택 구매 $P_{iB,Bol,t}^I I_{Tot,t}^{Bolg}$ 에서 기업의 건물 자본의 세액가치를 차감해야 함

□ 금융 객체는 $V_{bank,t-1}^{Vir^k}, V_{obl,t-1}^{Vir^k}, V_{RealKred,t-1}^{Vir^k}$ 이 해당되며 세부 내용은 아래와 같음

- 본 모형에서는 기업의 자산을 비과세 대상인 주식자산 A^S 과 과세 대상인 채권자산 A^B 로 구분하며, 기업 내 여러 자산을 언급한 두 유형으로 분류함
- 데이터 및 모형 내의 변수 측면에서 자산은 채권(obl), 국내 주식(IndlAktier), 해외 주식(UdlAktier), 은행 예금(Bank) 및 금(Guld)으로 구성됨
 - 기업이 보유하고 있는 국내의 주식은 EBT에서 제외되며, 배당금은 기업이 이미 배당금을 지급하였기에 법인세 과세 대상이 아님
 - 자산을 보유한 기업은 자산으로 발생한 수익에 대해 세금을 내지 않기에 주식은 모형 내 기업 문제에서 분리되며, 액면가 및 시장가로 평가되는 금 또한 동일함
 - 기업이 보유한 채권은 타 기업 및 가계에서 발행된 부동산 채권을 포함하며, 해당 자산의 이자율은 외생적이고 기업이 발행한 채권은 부채로 여겨짐
- 객체 $V_{bank,t-1}^{Vir^k}, V_{obl,t-1}^{Vir^k}$ 는 은행 예금 총액과 순 채권 보유액의 액면가이며 기업에서 발행한 모기지는 제외됨

- 순 채권 보유액은 자산으로서 보유하고 있는 채권에서 기업이 발행한 회사채를 차감한 값임

- 객체 $V_{RealKred,t-1}^{VirK}$ 는 기업이 발행한 모기지(Realkredit)의 액면가 총액으로, 부문별로 세분화되어 있지 않음
- 자산으로서 기타 에이전트가 보유한 모기지는 $V_{obl,t-1}^{VirK}$ 에 포함되며, 기업이 보유하고 있는 총 채권의 절반 이상을 차지함
- 모형 내에서 자산으로 보유한 채권은 일정하게 유지되며, 외생적 장기 추세에 따라 성장하고 모형 내 모든 에이전트는 동일한 자산을 보유할 경우 동일한 이자, 배당금 그리고 재평가율을 적용받음
 - 데이터상에서 일부 은행 부채는 상각되며 자산 포트폴리오의 세부 구성은 각기 상이하기에 모형 내 가정과는 차이가 있음
 - 일례로 채권은 데이터상에서 각기 상이하고, 에이전트별로 각기 다른 비율로 채권을 보유하며, 모형 내 구성보다 더 세분화되어 있음

□ 기업의 부채는 EBT에 대한 수식을 활용하여 산출함

- 각 부문별 총 부채는 데이터상의 투자 가격 및 건물 및 기계에 대한 자본스톡에 부채 금융 비율($\mu_t^D = r_t^{Laan2K} = 0.4$)을 곱하여 계산하며, 주거 부문을 제외한 모든 부문의 부채는 아래 식으로 나타냄

$$D_{sp,t} \equiv r_t^{Laan2K} (P_{b,sp,t}^I K_{b,sp,t} + P_{m,sp,t}^I K_{m,sp,t})$$

- 반면 주거 부문의 부채는 아래 식으로 나타냄

$$D_{Bol,t} \equiv r_t^{Laan2K} (P_{b,Bol,t}^I K_{b,Bol,t} - P_{b,Bol,t}^I K_t^{Boliq})$$

- 기업의 모기지 $V_{RealKred,t}^{VirK}$ 에 대한 총량 데이터가 주어지면 기업의 총 부채를 차분(difference)으로 계산할 수 있음

$$r_t^{OblLaan2K} V_t^{VirK} = \sum_{sp} D_{sp,t} - V_{RealKred,t}^{VirK}$$

- $V_{RealKred,t}^{VirK}$ 는 아래 식과 같음

$$V_{RealKred,t}^{VirK} \equiv \underbrace{r_t^{RealKredLaan2K}}_{\mu_{mortgages}} V_t^{VirK} = \left(\underbrace{r_t^{Laan2K}}_{\mu_t^D = 0.4} - \underbrace{r_t^{OblLaan2K}}_{\mu_{corporate}} \right) V_t^{VirK}$$

4) 법인세

□ 법인세 수입 총액은 법인세와 에너지 추출 부문의 가산세를 합하여 산출함

$$T_t^{VirK} = f_t^{Selskab} \tau_t^{Selskab} EBT_t + \underbrace{\tau_t^{SelskabNord} EBT_{udv,t}}_{Oil\ sector}$$

- $S_t^{Selskab}$ 는 법정 법인세율 22%와의 차이를 포착하는 요인이며, 세율 및 실효세율은 세수 및 과세표준에서 계산됨. $t_t^{SelskabNord}$ 는 북해 석유 채굴의 내연적 세율임
- 법인세 수입 T_t^{VirK} 의 수식은 경제세수총량(aggregate economy tax revenue)을 나타내며, 북해 석유의 하위 구성 요소는 에너지 추출 부문에만 적용됨
- 법정세율은 에너지 추출 부문을 제외한 모든 부문에서 $\tau_{sp,t} = \tau_t^{Selskab}$ 와 같이 기업의 결정 내에서 한계 세수로 여겨짐

5) 잉여현금흐름(Free Cash Flow, FCF)

□ $FCT_{sp,t}$ 는 기업의 잉여현금흐름으로 주식 및 채권 등의 금융자산에서 발생한 수입은 제외함. 단 채권 보유로 발생하는 소득에 대한 세수는 법인세 총 수입에 포함되어 있음

- 기타 순 이전인 $TilVirK_t^{NetOvf}$ 는 자본스톡에 비례하여 산출된다고 가정함

$$\begin{aligned} FCF_{sp,t} &= EBITDA_{sp,t} - T_{sp,t}^{Selskab} - \frac{V_{sp,t}^{VirKI}}{P_{sp,t}^I I_{sp,t}} \\ &\quad - (1 + r_{obl,t}^{Rente}) r_{t-1}^{Laan2K} V_{sp,t-1}^{VirKK} + r_t^{Laan2K} V_{sp,t}^{VirKK} \\ &\quad + \underbrace{TilVirK_t^{NetOvf}}_{T_t^0} \frac{FCF_{sp,t}}{FCF_t} \end{aligned}$$

□ 순 이전 $TilVirK_t^{NetOvf}$ 는 아래 식으로 나타냄

$$\underbrace{TilVirK_t^{NetOvf}}_{T_t^0} = \left\{ \begin{array}{l} TilVirK_t^{Off} - FraVirK_t^{Off} - FraVirK_t^{Hh} + \\ + JordKoeb_t^{Off} - SelvstKapInd_t + IndRest_t^{VirK} \end{array} \right.$$

- 순 이전은 공공 부문(기업)에서 기업(공공 부문)으로의 자본이전 $TilVirK_t^{Off}$ ($FraVirK_t^{Off}$), 기업에서 가계로의 자본이전 $FraVirK_t^{Hh}$, 공공 토지 구매 $JordKoeb_t^{Off}$, 기업에서 가

계로 직접 이전되는 자본소득 $SelstKapInd_t$, 그리고 해외에서 기업으로 이전되는 순 자본이전 $IndRest_t^{Vir^k}$ 로 구성됨

□ 총 투자지출의 가치는 데이터상의 총 민간투자 $V_t^{Vir^kI}$ 를 합산하여 산출함

$$V_t^{Vir^kI} = \sum_k \sum_{sp} P_{k,sp,t}^I I_{k,sp,t} - (P_{iB,Bol,t}^I I_{Tot,t}^{Bolg} + I_t^{Hhx})$$

○ 기업의 총 투자지출을 산출하기 위해 가계의 예산제약에서 비용으로 고려되는 가계 투자는 총 투자지출에서 제외되며, $P_{iB,Bol,t}^I I_{Tot,t}^{Bolg}$ 는 가계의 건물 투자, I_t^{Hhx} 는 가계의 비주거 부문 투자의 총 가치로 주로 자영업자의 자본 투자로 구성됨

○ 투자액(investment sum)은 아래 식으로 나타냄

$$\sum_k \sum_{sp} P_{k,sp,t}^I I_{k,sp,t}$$

○ 기업의 총 투자지출에서 제외되는 가계 투자는 아래 식으로 나타냄

$$P_{iB,Bol,t}^I I_{Tot,t}^{Bolg} + I_t^{Hhx}$$

○ I_t^{Hhx} 는 부문별로 세분화되어 있지 않으며, 주택 관련 항은 주거 부문에만 적용되며, 주거 부문을 제외한 모든 부문의 투자 $V_t^{Vir^kI}$ 는 아래 식으로 나타냄

$$V_{sp,t}^{Vir^kI} = \sum_k P_{k,sp,t}^I I_{k,sp,t} - I_{sp,t}^{Hhx}$$

○ 주거 부문의 투자는 아래 식으로 나타냄

$$V_{Bol,t}^{Vir^kI} = P_{iB,Bol,t}^I I_{iB,Bol,t} - P_{iB,Bol,t}^I I_{Tot,t}^{Bolg} - I_{Bol,t}^{Hhx}$$

- I_t^{Hhx} 는 가계 문제에서 발생하는 총 비용이기 때문에 외생적 객체로 취급하며, 이로 인해 모든 기업의 총 예산제약에서 차감할 수 있으며, 금융자산과 마찬가지로 해당 문제에서 분리될 수 있음

6) 기업 가치와의 연계

□ 본 모형에서는 투입물, 산출물 그리고 가격에 대한 문제는 내생적으로 해결하며, 외생적인 부분은 외생적 전망을 활용하여 해결함

- 내생적 부분은 투입물의 수량 및 가격 데이터를 기반으로 구축됐으며, 해당 데이터는 일부 과거 기간에 대한 정보가 불완전하다는 제한점을 갖고 있음
- 외생적 부분은 객체에 대한 액면가 및 시장가뿐만 아니라 ADAM의 데이터뱅크에서 산출한 기업의 총 가치, 즉 기업의 총 자본 가치를 활용하여 불완전한 과거 기간에 대한 잔차로서 내생적 구성 요소를 계산하여 제한점을 보완함
- 모형 내 자산 블록이 외생적인 이유는 자산 포트폴리오의 보유 주체가 기업과 가계 그리고 연금 관련 기업으로 구분되어 있기 때문이며, 이러한 구분은 금융 마찰이 없는 개방경제를 기반으로 함
- 외생적 부분은 전부 무시할 수 있지만 그 일부가 세수 혹은 이전의 형태로 정부의 예산제약에 포함된다는 점을 간과할 수 없으며, 해당 자산에서 발생하는 수익에 대한 과세 전망이 별도로 필요함

아. 내생적 운영잉여

1) 주거 부문을 제외한 모든 부문

- 주택을 제외한 모든 부문에서 수익에 대한 변수 구성은 아래 식과 같음

$$y_t^{Endo} = (1 - \tau_t)[P_y^Y Y_t - \hat{w}_t L_t - P_t^R R_t - \tau_t^K P_t^I K_{t-1} - T_t^{Rest}] - P_t^I I_t + \tau_t \delta_t^{Tax} K_{t-1}^{Tax} - (1 - \tau_t) r_t^D D_{t-1} + D_t - D_{t-1}$$

- 코드상 위 식을 표현하면 아래 식과 같음

$$\begin{aligned} \pi_{sp,t}^{Var} &\equiv (1 - f_t^{Selskab_t Selskab}) EBITDA_{sp,t} \\ &- \sum_k P_{k,sp,t}^I I_{k,sp,t} + f_t^{Selskab_t Selskab} \sum_k \delta_{k,t}^{Skat} K_{k,sp,t-1}^{Skat} \\ &- r_{Obl,t}^{Rente} (1 - f_t^{Selskab_t Selskab}) r_{t-1}^{Laan2K} \sum_k P_{k,sp,t-1}^I K_{k,sp,t-1} \\ &+ (r_t^{Laan2K} \sum_k P_{k,sp,t}^I K_{k,sp,t} - r_{t-1}^{Laan2K} \sum_k P_{k,sp,t-1}^I K_{k,sp,t-1}) \end{aligned}$$

2) 주거 부문

- 주거 부문의 운영잉여는 아래 식으로 나타냄

$$y_t^{Endo} = (1 - \tau_t) \left[\underbrace{[P_t^Y \phi_k - P_t^R \phi_R - \hat{w}_t \phi_l - \tau_t^K P_t^I]}_{EBITDA} K_{t-1} - T_t^{Rest} \right] \\ + T_t^0 + \mu_t^D P_t^I K_t - (1 + r_t^D (1 - \tau_t)) \mu_{t-1}^D P_{t-1}^I K_{t-1} - P_t^I I_t + \tau_t \delta_t^{Tax} K_{t-1}^{Tax}$$

□ 코드상 객체 $K_{b,Bol,t}$ 는 총 주택스톡이며 개인 소유와 임대주택을 모두 포함함

○ 아래 식은 임대주택 스톡이며, K_t^{Bolg} 는 개인 소유 주택의 스톡임

$$(K_{b,Bol,t} - K_t^{Bolg})$$

○ 임대주택만 포함된 운영잉여는 아래 식으로 나타냄

$$\pi_{Bol,t}^{Var} = (1 - f_t^{Selskab} \tau_t^{Selskab}) EBITDA_{Bol,t} + TilVirke^{NetOvf} \\ + r_t^{Laan2K} P_{b,Bol,t}^I (K_{b,Bol,t} - K_t^{Bolg}) \\ - (1 + r_{Obl,t}^{Rente} (1 - f_t^{Selskab} \tau_t^{Selskab})) r_{t-1}^{Laan2K} P_{b,Bol,t-1}^I (K_{b,Bol,t-1} - K_{t-1}^{Bolg}) \\ - P_{b,Bol,t}^I (I_{b,Bol,t} - I_{Tot,t}^{Bolg}) + f_t^{Selskab} \tau_t^{Selskab} \delta_{b,t}^{Skat} K_{b,Bol,t-1}^{Skat}$$

- 위의 식에서 개인 소유 주택에 대한 투자 및 자본스톡이 수정되며, EBITDA는 임대 주택 부분만 해당되기에 개인 소유 주택의 임대 가치는 차감됨

자. 고비용 외부금융을 통한 기업 투자

□ 고비용 외부금융 모형은 기업 모형에서 가장 단순하게 모형화되었음

○ 일례로 자본스톡은 표준 운동법칙 $K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + I_t$ 를 따르며 수익은 수입에서 투자 비용을 차감($\pi_t = Y(K_{t-1}) - P_t^I I_t$)하여 산출함

○ 기업은 현금 유량의 할인율인 외생적 비율 r_t 에 따라 펀드에 자유롭게 접근이 가능하며, r_t 는 모든 투자자가 요구하는 요구수익률이 됨

○ 비제약 조건하에서 최적의 자본 선택은 아래 식과 같으며, $\beta_{t+1} = 1/(1 + r_{t+1})$ 는 할인 요인으로 기업에 외생적이며 기업의 투자 금액에 영향을 받지 않음

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial K_t} + \beta_{t+1} \frac{\partial \pi_{t+1}}{\partial K_t} = 0$$

- 고비용 외부금융 모형은 자금조달 과정의 복잡성으로 불완전한 모형이라 여겨짐
 - 기업의 자금조달은 이익잉여금 혹은 내부자금으로 이뤄지며, 자금이 부족한 경우 은행과의 상호 작용 혹은 회사채를 발행하여 자금을 조달하거나 환매함
 - 외부금융은 모두 고비용이란 공통된 특성을 갖고 있으며, 해당 비용을 정의하여 모형을 확장하며, 외부금융이 모형 내에서 주요하게 다뤄지기 위해선 기업의 자금 수요가 있어야 하기에 외부금융에 제약조건이 설정됨

- 고비용 외부금융 모형에 $\pi_t \geq \bar{\pi}$ 인 제약조건을 추가하며, 외부금융에 대한 최적의 결정은 라그랑주 승수 ξ 를 기반으로 이뤄지며 아래 식으로 나타냄

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial K_t} + \left[\beta_{t+1} \frac{1 + \xi_{t+1}}{1 + \xi_t} \right] \frac{\partial \pi_{t+1}}{\partial K_t} = 0$$

- $\pi_t < \bar{\pi}$ 이면 $\xi_t > 0$ 을 따르며, 기업은 임계값까지 자유롭게 현금을 조달할 수 있으며, 그 이후에는 외부자금의 조달 비용이 급격히 증가함
 - 제약조건하에 일반화된 할인 요인은 감소하며, 고비용 외부금융의 효과로 인해 투자를 감소시킬뿐만 아니라 경기순환을 가속화시킴
- 고비용 외부금융 비용은 제약조건하에 있다는 가정을 기반으로 모형화되며, 이 과정에서 Gomes(2001)처럼 라그랑주 승수를 적용한 미분가능 비용함수를 사용함

- Gomes(2001)의 모형에서 배당금은 아래 식으로 나타냄

$$d_t = \pi_t - \xi(m_t)$$

- 함수 ξ 는 $m \leq 0$ 이면 0값을 가지고 $m \geq 0$ 이면 양(+)의 값으로 증가하며, $m_t = -\pi_t = P_t^I I_t - Y_t$ 로 나타냄

- 위의 내용을 기반으로 산출한 동일한 1계 조건은 아래 식으로 나타내며, 라그랑주 함수는 비용함수의 도함수를 대체함

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial K_t} + \left[\beta_{t+1} \frac{1 + \frac{\partial \xi_{t+1}}{\partial m_{t+1}}}{1 + \frac{\partial \xi_t}{\partial m_t}} \right] \frac{\partial \pi_{t+1}}{\partial K_t} = 0$$

1) MAKRO 내 금융 제약조건

□ 기업의 가치 V_t 의 극대화는 아래 식으로 나타냄

$$V_t = m_t - \xi_t + \beta_{t+1} V_{t+1}$$

- m_t 는 금융자산을 제외한 기업의 잉여현금흐름이며, 양(+의 값인 함수 ξ_t ($\xi_t \equiv \xi(m_t - \bar{m}_t) \geq 0$))를 활용하여 금융 마찰의 비용을 모형화함
- 주어진 투입물 X_t 에 대한 1계 조건은 아래 식으로 나타냄

$$\frac{\partial m_t}{\partial X_t} + \hat{\beta}_{t+1} \frac{\partial m_{t+1}}{\partial X_t} = 0$$

- 확장된(augmented) 할인율 $\hat{\beta}_{t+1}$ 은 아래 식으로 나타냄

$$\hat{\beta}_{t+1} = \beta_{t+1} \frac{1 - \partial \xi_{t+1} / \partial m_{t+1}}{1 - \partial \xi_t / \partial m_t}$$

- 확장된 할인율 $\hat{\beta}_{t+1}$ 에 추가 리스크 프리미엄 수익률 r_{t+1}^ξ 을 적용하면 $\hat{\beta}_{t+1} = 1/1 + r_{t+1} + r_{t+1}^p + r_{t+1}^\xi$ 로 다시 정의되며, 금융 마찰 함수 ξ 를 미분 가능 대칭함수로 나타냄

$$\frac{\partial \xi_t}{\partial m_t} \equiv \mu \tanh(\kappa [m_t - \bar{m}_t])$$

- $\lim_{m_t \rightarrow \infty} \partial \xi_t / \partial m_t = \mu$ 이고, $\lim_{m_t \rightarrow -\infty} \partial \xi_t / \partial m_t = -\mu$ 이며, $\mu = 2\%$ 인 경우 기업은 2%의 외부금융 수수료($m_t < \bar{m}_t$)를 지불함
- 모수가 $\kappa > 0$ 인 경우 κ 는 $m_t - \bar{m}_t = 0$ 인 도함수의 기울기를 통제함

2) 동질성

- 함수 $\xi_{s,t}$ 는 $\bar{m}_{s,t} = 0$ 이고 κ 값이 충분히 높을 경우 동질성이 거의 확보되며, 부문별 첨자 s 로 부문이 구분됨
- 잉여현금흐름의 목표 값은 0이 아니며, 장기적으로 동질성을 유지하기 위해 $\bar{m}_{s,t}$ 를 내생적으로 조정하면 다음 식으로 나타남

$$\bar{m}_{s,t} = \gamma \bar{m}_{s,t-1} + (1-\gamma)m_{s,t} - \epsilon_{s,t}$$

- γ 는 조정 속도를 통제하며 $\epsilon_{s,t}$ 는 기준선 전망에서 $\bar{m}_{s,t} = m_{s,t}$ 로 설정하고, 부문

별로 동일 행위를 보장하기 위해 $\kappa_{s,t} = \frac{\hat{\kappa}}{K_{s,t}}$ 를 캘리브레이션함

- 강한 동질성을 확보하기 위해 $\kappa_{s,t}$ 는 $K_{s,t}$ 의 변화에 대응하여 내생적으로 조정되어야 하나 $m_{s,t}$ 에서 $\bar{m}_{s,t}$ 를 차감한 값이 0에 수렴함에 따라 큰 문제가 되지 않을 것임

- 소비습관이 조정된(habit adjusted) 잉여현금흐름 $\hat{m}_{s,t}$ 은 아래 식과 같음

$$\hat{m}_{s,t} \equiv m_{s,t} - \bar{m}_{s,t} = \gamma[m_{s,t} - m_{s,t-1} + \hat{m}_{s,t-1}] + \epsilon_{s,t}$$

- 확장된 할인 요인을 재배열하여 추가 리스크 프리미엄에 대한 식을 아래와 같이 도출함

$$r_{s,t+1}^{\xi} = [1 + r_{t+1} + r_{t+1}^p] \left[\frac{1 - \mu_s \tanh(\kappa_s \hat{m}_{s,t})}{1 - \mu_s \tanh(\kappa_s \hat{m}_{s,t+1})} - 1 \right]$$

3) 가속

- 본 모형에서 사용한 금융제약 모형은 Bernanke and Gertler(1989)의 담보 가속 모형(collateral acceleration models)보다는 Gomes(2001)의 모형과 유사함
 - 경제 호황기에 제약조건을 완화시키는 요인은 물가상승으로 인한 수입 확대와 자본 축적으로 인한 생산 능력 향상임
 - 담보의 가치 개선 혹은 추가 세수로 인한 선한 의도 효과(goodwill effect) 증가로 인한 제약조건 추가 완화 등은 본 모형에 반영되어 있지 않음

3. 가격 설정 행동

- 소비자에 의해 지불된 재화의 가격 $P_{s,t}$ 는 일반적으로 생산 최적화로 산출된 가격 $P_{s,t}^0$ 와 동일하지 않음
 - 최적화 가격 $P_{s,t}^0$ 는 비용 최소화 문제의 중첩 배열을 통해 구성되며, 생산 기술과 투

입물 시장의 특징을 반영함

- 특정 재화에 대한 시장 내 완전경쟁은 소비자 가격 $P_{s,t}$ 와 최적화 가격 $P_{s,t}^0$ 가 동일함을 의미함

$$\underbrace{(P_{s,t} |_{all s, \omega_t, r_t})}_{Input\ Prices} \xRightarrow{Production} \underbrace{P_{i,t}^0 |_{i \in s}}_{Optimization\ Price} \equiv \underbrace{P_{i,t} |_{i \in s}}_{Final\ Price}$$

- 위의 완전경쟁에 대한 해(solution)는 경제 충격 및 변동에 빠르게 반응하여 데이터상의 경제동학과 매우 상이한 가격에 대한 경제동학을 생성함

- 가격 관측치는 완전경쟁에 대한 해에 의해 생성된 가격보다 완만하며, 이를 해결하기 위해 최적화 가격과 최종 가격이 상이하도록 제조업체와 소비자 사이에 가격 설정 행동을 추가함

$$\underbrace{(P_{s,t} |_{all s, \omega_t, r_t})}_{Input\ Prices} \xRightarrow{Production} \underbrace{P_{i,t}^0 |_{i \in s}}_{Optimization\ Price} \xRightarrow{Price\ Setting} \underbrace{P_{i,t} |_{i \in s}}_{Final\ Price}$$

- 가격 설정에 대한 중간 모형은 독점경쟁 문제를 기반으로 모형화됐으며, 주거 부문을 제외한 모든 민간 생산 부문에 적용함

- 모든 민간 생산 부문에 중간 모형을 적용한 결과, 2017년 기준 명목 GDP의 73.5%를 차지하는 제조 및 서비스 부문에서 양(+)의 마크업(Mark-up)을 산출함
- 제조 및 서비스 부문을 제외한 나머지 부문은 0 혹은 음(-)의 마크업을 산출하며 2018년 이후로는 완전히 경쟁력이 있는 부문으로 여겨짐
- 단 에너지 추출 및 건설 부문은 제외됨

- 독점경쟁뿐만 아니라 가격 변동으로 인한 조정 가격에서 발생하는 가격경직성 또한 고려되어야 함

- 독점경쟁만으로 가격경직성이 발생하지 않으며, 단지 가격 설정 행동이 가격경직성을 발생시킨다는 이론적 토대만을 제공함

가. 독점경쟁과 가격경직성

- 독점경쟁은 기업 문제에 추가된 상부 구조(superstructure)이며, 모든 부문은 질량이 1인 기업의 연속체를 갖고 있고, 각 기업은 각기 다양한 품종을 생산하는 것으로 가정함

- 모든 품종에 대한 수요는 수요탄력성을 가진 표준 CES 총량으로 나타내며, 균제상태에서 소비자에 의해 지불되는 가격 $P_{s,t}$ 는 탄력성을 반영한 한계생산비용의 마크업임. 하나의 부문 내 기업의 단위는 단일 대표 기업임
- 한계비용가격 $P_{s,t}^0$ 는 유연하지만 소비자가격은 그렇지 않기에 Kravik et al.(2019)과 같이 독점경쟁 구조의 상단에 가격 조정 비용을 적용하여 가격경직성을 추가함

나. 독점경쟁모형

- 각 부문 내에서 기업은 독점경쟁의 대상이 되며, 독점경쟁 체제 안에서 각 부문의 모든 기업은 동일한 수요탄력성 η_t 를 적용받음
- 부문 내 모든 기업의 주어진 총 가격 P_t 는 CES 물가지수로 가격 조정 비용이 없으면 P_t 는 한계비용 가격 $P_{s,t}^0$ 에 대한 마크업이 되나, 기업이 가격 변동을 위해 2차 조정 비용을 지불한다고 가정할 시 가격은 경직적(sticky)이 됨
- 조정비용함수는 Rotemberg(1982)와 같이 가격 수준의 변동(p_t/p_{t-1})을 조정 비용에 적용하는 대신 인플레이션 변동을 적용하여 다양한 경제동학을 허용케 함
- 독점경쟁모형은 개별 기업의 수요를 산출하며 아래 식으로 나타냄

$$y_t^j = \left(\frac{p_t^j}{P_t} \right)^{-\eta_t} Y_t$$

- 조정 비용이 없는 경우 기업은 가격을 한계비용에 대한 마크업으로 설정함

$$P_t^* = \frac{\eta_t}{\eta_t - 1} P_t^0 = \left(1 + \frac{1}{\eta_t - 1} \right) P_t^0 = (1 + \theta_t) P_t^0$$

1) 최적화 문제

- 해당 부문의 각 기업 j 는 가격 변동에 대한 조정 비용에 영향을 받으며 조정 비용은 아래 식으로 나타냄

$$g_t^j = \frac{\gamma}{2} \left[\frac{p_t^j/p_{t-1}^j}{p_{t-1}^j/P_{t-2}^j} - 1 \right]^2 P_t Y_t$$

○ p_t^j 는 기업 j '의 선택 비용, P_t 는 부문 내 총 가격 수준, Y_t 는 부문의 총 생산임

□ 조정비용함수의 도함수는 아래 식과 같음

$$\frac{p_t^j}{y_t^j} \frac{\partial g_t^j}{\partial p_t^j} = \gamma \frac{p_t^j/p_{t-1}^j}{p_{t-1}^j/P_{t-2}} \left[\frac{p_t^j/p_{t-1}^j}{p_{t-1}^j/P_{t-2}} - 1 \right] \frac{P_t Y_t}{y_t^j}$$

$$\frac{p_t^j}{y_t^j} \frac{\partial g_{t+1}^j}{\partial p_t^j} = -2\gamma \frac{P_{t-1} p_{t+1}^j}{p_t^j \times p_t^j} \left[\frac{P_{t-1} p_{t+1}^j}{p_t^j \times p_t^j} - 1 \right] \frac{P_{t+1} Y_{t+1}}{y_t^j}$$

□ 각 부문 내 기업 j 는 아래의 동태적 문제를 해결함

$$V_t^j = \max_{p_t^j} \{ (p_t^j - P_t^{j,0}) y_t^j - g_t^j + \beta_{t+1} V_{t+1}^j \}$$

○ 위의 식을 도출하기 위해 아래 식의 y_t^j 와 조정비용함수를 활용함

$$y_t^j = \left(\frac{p_t^j}{P_t} \right)^{-\eta_t} Y_t$$

□ 기업 j 의 사용자비용에 대한 1계 조건은 아래 식으로 나타냄

$$p_t^j = \frac{\eta_t}{\eta_t - 1} P_t^{j,0} - \frac{1}{\eta_t - 1} \frac{p_t^j}{y_t^j} \left[\frac{\partial g_t^j}{\partial p_t^j} + \beta_{t+1} \frac{\partial g_{t+1}^j}{\partial p_t^j} \right]$$

□ 위 과정을 거쳐 아래 식을 산출함

$$p_t^j = \frac{\eta_t}{\eta_t - 1} P_t^{j,0} - \frac{\gamma}{\eta_t - 1} \frac{p_t^j/p_{t-1}^j}{p_{t-1}^j/P_{t-2}} \left[\frac{p_t^j/p_{t-1}^j}{p_{t-1}^j/P_{t-2}} - 1 \right] \frac{P_t Y_t}{y_t^j} + \frac{\gamma}{\eta_t - 1} \left(\beta_{t+1} 2 \frac{P_{t-1} p_{t+1}^j}{p_t^j \times p_t^j} \left[\frac{P_{t-1} p_{t+1}^j}{p_t^j \times p_t^j} - 1 \right] \frac{P_{t+1} Y_{t+1}}{y_t^j} \right)$$

□ 대칭 및 질량이 1인 기업에 대한 가정을 활용하여 최종식을 산출함

$$\begin{aligned}
 P_t &= (1 + \theta_t)P_t^0 \\
 &\quad - \psi \left[\frac{P_t/P_{t-1}}{P_{t-1}/P_{t-2}} - 1 \right] \frac{P_t/P_{t-1}}{P_{t-1}/P_{t-2}} P_t \\
 &\quad + 2\beta_{t+1}\psi_t \frac{Y_{t+1}}{Y_t} \left[\frac{P_{t+1}/P_t}{P_t/P_{t-1}} - 1 \right] \frac{P_{t+1}/P_t}{P_t/P_{t-1}} P_{t+1}
 \end{aligned}$$

- β_{t+1} 은 할인 요인이며 $\psi_t \equiv \gamma\theta_t$ 임

□ 최종 마크업은 아래 식으로 나타냄

$$\begin{aligned}
 P_t - P_t^0 &= \theta_t P_t^0 \\
 &\quad - \psi_t \left[\frac{P_t/P_{t-1}}{P_{t-1}/P_{t-2}} - 1 \right] \frac{P_t/P_{t-1}}{P_{t-1}/P_{t-2}} P_t \\
 &\quad + 2\beta_{t+1}\psi_t \frac{Y_{t+1}}{Y_t} \left[\frac{P_{t+1}/P_t}{P_t/P_{t-1}} - 1 \right] \frac{P_{t+1}/P_t}{P_t/P_{t-1}} P_{t+1}
 \end{aligned}$$

- 상당 수준의 독점시장 지배력하에서도 최종 마크업은 0에 가까움

다. 결과

□ 가격 설정 모형은 변동성이 큰 최적화 가격을 투입물로 사용하며, 구조를 추가하여 보다 완만한(sluggish) 방법으로 행동하는 소비자가격에 대한 객체를 생성함

- 데이터에 가격 설정 모형을 적용할 때 θ 와 ψ 의 독립성을 가정함. 그 결과 θ 는 제조(4%), 서비스(9%), 에너지 추출(29%) 부문에서 양(+)¹의 값을 가지며, 농업, 에너지 공급, 해상운송 부문에서 2017년까지는 음(-)²의 값을 가지다가 그 이후부터는 0이 됨
 - 해당 부문에서 $P^0 = P$ 인 완전경쟁 조건을 설정하여 θ 와 ψ 가 모두 제거됨
- 오직 시장에서만 가격이 결정되기에 마크업이 상당 수준의 양(+)³의 값을 나타내나 가격 설정 구조에는 마크업이 적용되지 않기에 외생적으로 가격을 설정함
- 건설 부문에서는 양(+)⁴의 조정 비용과 함께 $P_t = P_t^0$ 인 0의 마크업을 적용함
- 제조 및 서비스 부문은 덴마크 경제 내에서 가장 규모가 큰 두 개의 민간 부문으로, 두 부문뿐만 아니라 총 가격 수준에서도 완만한 가격을 생성할 수 있음

〈표 II-4〉 가격 및 마크업 변수의 코드명

$P_{s,t}^0$	= pKLBR[s,t]	$\psi_{s,t}$	= upYTraeghed[sp]
$P_{s,t}$	= pY[sp,t]	$Y_{s,t}$	= qY[sp,t]
$\sigma_{s,t}$			
$\theta_{s,t}$	= srMarkup[sp,t]		

출처: DREAM(2021), p. 97.

4. 노동시장

- 노동시장모형은 근로자 대표 에이전트와 시장 임금을 결정하는 기업 간의 협상까지 포괄하며 고용 및 임금 관련 행동 및 수준을 구현하는 것이 주목적임
 - 노동시장은 이질적인 가계와 기업으로 구성되며, 가계는 노동시장 참여와 근로시간 공급을 선택하고 기업은 최적의 구인공고를 통해 노동 수요를 산출함
- 노동시장모형에서 가계는 근로자의 연령대별로 상이한 수명주기 문제에 직면하며, 기업은 부문별로 세분화된 생산 문제에 직면함
 - 위 문제가 미치는 영향을 제한하기 위해 가계는 연령별로, 기업은 부문별로 고유하게 모형을 구축하며 두 차원이 동시에 존재하지 않도록 함
 - 가계는 재정적 제약 가계와 비제약 가계로 구분되며, 두 유형의 가계 모두 동일한 노동시장 결정을 하도록 가정함
- 노동시장모형에 대한 주요 가정은 아래와 같음
 - 첫째, 기업은 고용자를 선택할 수 없으며, 기업과 근로자는 무작위 매칭으로 연계되고 근로자의 해고는 최적의 선택이 아님
 - 둘째, 최적의 노동시장 참여 및 근로시간은 연령 및 부문별로 상이하고, 근로자는 본인인 고용될 부문을 선택할 수 없으며, 타 부문으로의 이동을 위한 자발적 퇴사는 불가능함
 - 셋째, 기업 내 연령 분포는 계산상의 이유로 모든 기업이 항상 동일하다고 가정하며, 데이터상에서 근로자의 평균 연령은 기업의 규모별로 동일하고, 노동력의 규모는 성장

혹은 쇠퇴하는 기업별로 동일함

가. 가계

- 질량이 1인 가계는 실업에 대한 리스크를 공유하는 동일한 에이전트를 포함하며, 매 기 초 모든 결정이 내려지고 매 기 말 생산이 발생하는 것으로 가정함
- t 기에 연령 a 인 가계의 외생적 수는 $N_{a,t}$ 로 나타내며, t 기에 연령 a 인 가계는 생존할 확률 $s_{a,t}$ 에 따라 다음 연령 및 기간까지 생존함
 - 만약 가계 내 구성원 한 명이 사망할 경우 해당 가구에 속한 구성원 모두 함께 사망한다고 가정함
- 매 기 초에 연령 a 인 가계의 에이전트는 고용($(1 - \delta_{a-1,t-1})q_{a-1,t-1}^e$) 혹은 실업($(1 - (1 - \delta_{a-1,t-1})q_{a-1,t-1}^e)$) 중 하나의 고용 상태에 놓임
 - $\delta_{a,t}$ 는 외생적 연령별 일자리 소멸률(job destruction rate)임
- 노동시장 상태 결정 및 시장 청산이 t 기에 이뤄지면 가계는 $q_{a,t}^e$ ($0 < q_{a,t}^e < 1$)의 비율로 고용되며, 총 고용 n_t 는 덴마크에 거주하는 에이전트의 최적화된 고용 n_t^e ($\sum_a q_{a,t}^e N_{a,t}$)를 포함하고 이주근로자의 외생적 수치 n_t^f 를 합산하여 산출함

1) 효용함수와 예산제약

- (효용함수) 최적 소비 결정에 대한 효용함수는 소비 및 주거 관련 함수이며, 이에 노동 참여 및 탐색 변수 $q_{a,t}^s$ 와 근로시간 $h_{a,t}^e$ 를 추가시킴
- $Z_{a,t}$ 항은 가계에 의해 주어지는 효용 가중치로 정상성(stationarity)을 통제하고 1계 조건에서 소비의 한계효용을 제거하는 데 사용됨
 - 그 결과 제약 가계와 비제약 가계는 동일한 탐색 및 시간 결정을 갖게 되며, 이로 인해 모형의 복잡성이 매우 감소됨
- 제약 가계는 주로 소득 충격(income shock)이 발생했을 때의 한계소비 성향에 중점을 두며, 노동시장의 탐색 결정에 큰 영향을 미치지 않는 것으로 가정함
- 객체 $\rho_{a,t}^e$ 는 개별 근로자의 생산성 요인이며, $\lambda_{a,t}^n$ 와 $\lambda_{a,t}^h$ 는 비효용 모수임

$$U_{a,t} = U(C_{a,t}, D_{a,t})$$

$$- \left[\underbrace{\frac{Z_{a,t}^S}{Control}}_{Control} \underbrace{\frac{\rho_{a,t}^e}{Scaling}}_{Scaling} \underbrace{\lambda_{a,t}^n \frac{(q_{a,t}^s)^{1+\eta^n}}{1+\eta^n}}_{Disutility\ from\ search} + \underbrace{\frac{Z_{a,t}^H}{Control}}_{Control} \underbrace{\frac{\rho_{a,t}^e q_{a,t}^e}{Scaling}}_{Scaling} \underbrace{\lambda_{a,t}^h \frac{(h_{a,t}^e)^{1+\eta^h}}{1+\eta^h}}_{Disutility\ from\ hours} \right]$$

□ (예산제약) 예산제약식은 노동시장 참여 가정하에 관련 객체를 포괄하며, 세부 내용은 아래와 같음

- 노동시장 참여는 실업 중일 때 구직활동을 하겠다는 약속이고, 미참여는 특정 확률로 구직활동을 하지 않겠다는 결정이며, 전체 가계 내 모든 에이전트는 어느 정도의 강도로 구직활동을 하기에 노동시장 내에 있다고 가정함
- 탐색 객체 $q_{a,t}^s$ 는 구직 탐색 중인 근로자의 수(질량이 1인 가계의 비율) 혹은 관측 불가능한 탐색 횟수 및 에이전트의 수를 복합적으로 나타내는 척도임
 - $q_{a,t}^s$ 측정값은 하한선 0에서 상한선 $1 - (1 - \delta_{a-1,t-1})q_{a-1,t-1}^e$ 의 범위를 가짐
- 가계는 구직률 $\hat{x}_{a,t}$ 에 적용받으며, 이는 총 노동시장 참여 또는 총 탐색 노력(total search effort)에서 얻은 일자리 수를 의미함. 가계 고용에 대한 운동법칙은 아래 식으로 나타냄

$$q_{a,t}^e = (1 - \delta_{a-1,t-1})q_{a-1,t-1}^e + \hat{x}_{a,t}q_{a,t}^s$$

- 구직자가 구직활동을 하면 이전 기간에 직장을 유지한 근로자와 동일한 급여 $\tilde{w}_{a,t}$ 를 받는다고 가정하며, $\tilde{w}_{a,t}$ 는 총 근로시간에 대한 세후 임금소득임

$$\tilde{w}_{a,t} = (1 - \tau_{a,t})\bar{w}_t \rho_{a,t}^e h_{a,t}^e$$

- 구직 실패자는 보상 $b_{a,t} = r_{a,t}^b \tilde{w}_{a,t}$ 를 얻으며 $r_{a,t}^b$ 는 단순히 외생적 비율이 아닌 대체율 함수이고, 실직자 혹은 구직 포기자($1 - (1 - \delta_{a-1,t-1})q_{a-1,t-1}^e - q_{a,t}^s$) 또한 동일한 보상을 받음
- 예산제약은 아래 식으로 나타내며, $\Pi_{a,t}$ 항은 관련된 모든 객체를 요약함

$$p_t^c C_{a,t} = \hat{x}_{a,t} \tilde{w}_{a,t} q_{a,t}^s + \tilde{w}_{a,t} (1 - \delta_{a-1,t-1}) q_{a-1,t-1}^e + (1 - \hat{x}_{a,t}) b_{a,t} q_{a,t}^s$$

$$+ b_{a,t} (1 - (1 - \delta_{a-1,t-1}) q_{a-1,t-1}^e - q_{a,t}^s) + \Pi_{a,t}$$

- 예산제약식에 가계 고용의 운동법칙을 대입하고 각 항을 단순화한 뒤 $q_{a,t}^s$ 를 제거하여 아래 식을 도출함

$$p_t^e C_{a,t} = (\tilde{w}_{a,t} - b_{a,t})q_{a,t}^e + b_{a,t} + \Pi_{a,t}$$

- 가계의 구성원은 구직 실패 보상 b 를 받으며, 근로자는 b 이상의 추가 임금 프리미엄을 받음. 임금 프리미엄은 구직활동 및 노동시장 참여 동기를 결정함
- 실업수당은 임금 프리미엄을 변경하는 역할만 수행하며, 임금이 b 에 비례하여 변동한다면 탐색 노력에는 변동이 없을 것임
- 예산제약식을 도출하고 단순화할 때 구직 탐색 중인 가계 구성원의 수인 $q_{a,t}^s$ 를 활용하는 것은 유용하나, $q_{a,t}^s$ 가 총 탐색 노력 객체인 경우 그 범위가 0에서 $1 - (1 - \delta_{a-1,t-1})q_{q-1,t-1}^e - q_{a,t}^s$ 내 있음에도 동일 단위로 측정되지 않음
- 구직 탐색 중인 가계 구성원의 수 $q_{a,t}^s$ 와 동일한 단위로 측정되는 객체는 $\hat{x}_{a,t} q_{a,t}^s$ 뿐임

2) 시간의 최적 선택

- 시간은 데이터에서 연령으로 구분되어 있으며, 해당 속성을 캘리브레이션하기 위해 비효용 모수 $\lambda_{a,t}^h$ 또한 연령으로 구분됨. 시간에 대한 1계 조건은 아래 식으로 나타냄

$$\frac{\partial U_{a,t}}{\partial C_{a,t}} [1 - \tau_{a,t}] \frac{\bar{w}_t}{p_t^e} = \underbrace{Z_{a,t}^{ch} Z_{a,t}^{wh} \lambda_{a,t}^h}_{Z_{a,t}^H} (h_{a,t}^e)^\eta$$

- $Z_{a,t}^{wh}$ 는 세후 실질임금의 추세를 통제하는데 사용되며, 1계 조건은 정상성을 가지고 모서리해로 풀리지 않음
- Z_t^{ch} 는 아래 식에서 자산 효과(wealth effect)를 제거하는 데 사용되며, 이는 재정적 제약 가계와 비제약 가계가 서로 동일한 최적의 조건을 가지고 있음을 의미함
- 장기적 경로에서 실질임금의 단기적 편차를 고려함

$$Z_t^{wh} = \lambda^{zwh} Z_{a-1,t-1}^{wh} + (1 - \lambda^{zwh})(1 - \tau_{a,t}) \frac{\bar{w}_t}{p_t^c}$$

- 그러나 소비의 한계효용에서는 단기적 편차를 고려하지 않음

$$Z_t^{ch} = \frac{\partial U_{a,t}}{\partial C_{a,t}}$$

- 이를 고려하여 아래 식을 도출함

$$\frac{1}{Z_{a,t}^{wh}}(1 - \tau_{a,t})\frac{\bar{w}_t}{p_t^c} = \lambda_{a,t}^h (h_{a,t}^e)^{\eta^h}$$

- 결국에는 Z항에 대한 임금 비율은 1계 조건에서 제거됨

$$1 = \lambda_{a,t}^h (h_{a,t}^e)^{\eta^h}$$

- 시간은 선호도에만 반응하며 $\eta^h = 11$ 인 이후로 매우 낮은 탄력성을 지님

3) 구직 탐색의 최적 선택

- 구직률은 가계에 외생적이기 때문에 $q_{a,t}^e$ 를 직접 선택하여 탐색의 최적 선택 문제를 풀 수 있으며, $q_{a,t}^e$ 에 대한 1계 조건은 아래 식과 같음

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{a,t}}{\partial C_{a,t}} \frac{(\tilde{w}_{a,t} - b_{a,t})}{\tilde{w}_{a,t}} \frac{\tilde{w}_{a,t}}{p_t^c} &= Z_{a,t}^H \rho_{a,t}^e \lambda_{a,t}^h \frac{(h_{a,t}^e)^{1+\eta^h}}{1+\eta^h} \\ &+ Z_{a,t}^S \Gamma_{a,t} - \beta_{a,t} (1 - \delta_{a,t}) s_{a,t} Z_{a+1,t+1}^S \Gamma_{a+1,t+1} \end{aligned}$$

- $s_{a,t}$ 는 생존율, $\beta_{a,t}$ 는 효용 할인 요인이고, 최적성은 현재와 미래의 한계효용을 트레이드 오프(trade-off)하며, $\Gamma_{a,t}$ 는 아래 식으로 나타냄

$$\Gamma_{a,t} = \frac{\lambda_{a,t}^n \rho_{a,t}^e [q_{a,t}^s]^{\eta^n}}{\hat{x}_{a,t}}$$

4) 장단기적 변동에 대한 대수적 표현

- $Z_{a,t}^S$ 는 $Z_{a,t}^{cs} Z_{a,t}^{ws}$ 로 정의하고, 시간 관련 항에서와 같이 동일한 소비 요인, 즉 $Z_{a,t}^{cs}$ 는 소비의 한계효용에 대한 코호트별 평균인 $Z_{a,t}^{ch}$ 와 동일하다고 가정하며, 그다음 $Z_{a,t}^S$ 로 나누는 후, 시간의 1계 조건을 활용하여 아래 식을 산출함

$$\begin{aligned} \left[1 - r_{a,t}^b - \frac{1}{1 + \eta^h} \right] \rho_{a,t}^e \left[\frac{1}{Z_{a,t}^{ws}} (1 - \tau_{a,t}) \frac{\bar{w}_t}{p_t^c} h_{a,t}^e \right] &= \\ \Gamma_{a,t} - \beta_{a,t} (1 - \delta_{a,t}) s_{a,t} \frac{Z_{a+1,t+1}^S}{Z_{a,t}^S} \Gamma_{a+1,t+1} & \end{aligned}$$

- 아래 식에서 단기 임금 요인은 시간 방정식 내의 임금 요인과 동일하지 않음

$$Z_{a,t}^{ws} = \lambda^{zws} Z_{a-1,t-1}^{wh} + (1 - \lambda^{zws})(1 - \tau_{a,t}) \frac{\bar{w}_t}{p_t^c} h_{a,t}^e \left[1 - r_{a,t}^b - \frac{1}{1 + \eta^h} \right]^{1 - \eta^n / \eta^b}$$

- $Z_{a,t}^{ws}$ 에 $\left[1 - r_{a,t}^b - \frac{1}{1 + \eta^h} \right]^{1 - \eta^n / \eta^b}$ 을 포함시켜 $Z_{a,t}^{ws}$ 를 편익 비율(benefit ratio) r_a^b 의 변동과 연관된 노동공급의 장기 탄력성 추정치와 일치시키며, 이 과정에서 노동공급의 단기적 변동은 고려되지 않음
- 단기의 $Z_{a,t}^{CS}$ 에서 소비의 한계효용은 정태적 결정(Static decision)이기 때문에 제거되나, 아래 식의 우변에서는 다시 활용됨

$$\frac{Z_{a+1,t+1}^{CS}}{Z_{a,t}^{CS}} = \frac{\frac{\partial U_{a+1,t+1}}{\partial C_{a+1,t+1}}}{\frac{\partial U_{a,t}}{\partial C_{a,t}}}$$

- 이는 제거된 자산 효과를 되살릴 뿐만 아니라 HTM 및 미래지향적 가계가 서로 상이한 탐색 결정을 가진다는 것을 의미함
- $\frac{Z_{a+1,t+1}^{CS}}{Z_{a,t}^{CS}}$ 는 캘리브레이션된 연도 내 미래지향적 에이전트의 평균 수와 근사해지며, 소비의 한계효용은 HTM과 미래지향적 에이전트에 대해 고정적이고 장단기적으로 동일하게 작동한다고 가정함
- $\Gamma_{a,t}$ 를 대체하고 $\rho_{a,t}^e$ 로 나누면 장기적으로 1계 조건은 아래 식과 같이 주어지며, 이를 통해 대체율(replacement ratio)과 연관된 노동공급의 탄력성 추정치(a back of the envelope measure)를 얻을 수 있음

$$\left[1 - r_a^b - \frac{1}{1 + \eta^h} \right]^{\eta^n / \eta^b} = [q_a^s]^{\eta^n} \cdot \frac{\lambda_a^n}{\hat{x}_a} \underbrace{\left(1 - (1 - \delta_a) s_a \beta_{a,t} \frac{Z_{a+1}^S}{Z_a^S} \frac{\rho_{a+1}^e}{\rho_a^e} \frac{\frac{\lambda_{a+1}^n \left[\frac{q_{a+1}^s}{q_a^s} \right]^{\eta^n}}{\lambda_a^n \left[\frac{q_a^s}{q_a^s} \right]^{\eta^n}}}{\frac{\hat{x}_{a+1}}{\hat{x}_a}} \right)}_{\phi_a}$$

- ϕ_a 에 포함된 모든 객체는 외생적이라 간주하고, 이에 로그를 취한 후 미분함

$$\frac{1}{\eta^b} \cdot d\log\left(1 - r_a^b - \frac{1}{1 + \eta^h}\right) \approx d\log(q_a^s)$$

- 위의 1계 조건에서 실질임금이 탐색 노력에 외연적으로 영향을 미치지 않는다는 점을 고려하여 본 모형에서는 위 식의 장기 버전을 구현하여 활용함

5) 노동공급 탄력성

- 임금에 대한 시간의 단기 탄력성은 $\frac{1}{\eta^h}$ 로 산출하나 총 노동공급의 탄력성은 아니며, 덴마크에 거주하는 에이전트의 최적화된 고용 n_t^e 은 $q_t^e N_t$ 으로 정의함

$$\frac{d\log(n_t^e h_t^e)}{d\log\left(\frac{w_t}{p_t^c}\right)} = \frac{d\log(n_t^e)}{d\log\left(\frac{w_t}{p_t^c}\right)} + \frac{1}{\eta^h}$$

- 고용은 참여의 간접적 결과이고, 외생적 충격에 따른 균제상태에서 구직률은 변동하며, Attanasio et al.(2018)의 연구에 따라 전체 모형이 실행되는 중에 외생적 충격에 대한 노동공급의 반응을 구조적 모수로 보여주는 것은 가능함

6) 총량(aggregation)

- 인구 유량은 아래 식을 따르며 $I_{a,t}$ 는 유입 이민자, $E_{a,t}$ 는 유출 이민자이며, $N_{a-1,t-1} s_{a-1,t-1} - E_{a,t}$ 는 이전 기간에서 생존한 덴마크에 거주 중인 가계임

$$N_{a,t} = N_{a-1,t-1} s_{a-1,t-1} + I_{a,t} - E_{a,t}$$

- 유출 이민자 $E_{a,t}$ 는 국외로 떠난다는 것을 제외하고 거주자와 동일하며, 덴마크에 잔류한 에이전트의 가계 고용은 아래 식으로 나타냄

$$q_{a,t}^e = (1 - \delta_{a-1,t-1})q_{a-1,t-1}^e + \hat{x}_{a,t} q_{a,t}^s$$

- 유입 이민자 $I_{a,t}$ 는 덴마크로 유입되는 가계로 기존 거주 가계와 동일한 고용 $q_{a,t}^e$ 로 가정하며 아래 식으로 나타냄

$$q_{a,t}^e = \hat{x}_{a,t} q_{a,t}^s + q_{a,t}^I$$

- $I_{a,t}$ 는 덴마크 내 고용 이력이 없기에 일부 유입 이민자는 이미 구직된 상태로 유입되어 구직 탐색을 하지 않는다고 가정하며, 고용량 $q_{a,t}^I, I_{a,t}$ 에 반영됨

○ 앞서 도출된 식들을 조합하여 아래 식을 도출함

$$\frac{N_{a,t}q_{a,t}^e}{n_{a,t}^e} = (1 - \delta_{a-1,t-1}) \left(s_{a-1,t-1} - \frac{E_{a,t}}{N_{a-1,t-1}} \right) q_{a-1,t-1}^e N_{a-1,t-1} + \hat{x}_{a,t} \underbrace{q_{a,t}^s (s_{a-1,t-1} N_{a-1,t-1} - E_{a,t} + I_{a,t})}_{n_{a,t}^s \equiv N_{a,t} q_{a,t}^s} + q_{a,t}^I I_{a,t}$$

○ $q_{a,t}^I$ 를 아래 식과 같이 가정함

$$q_{a,t}^I \equiv (1 - \delta_{a-1,t-1}) q_{a-1,t-1}^e$$

○ 덴마크에 거주 중인 에이전트의 최적화된 고용 n_t^e 에 위 가정을 반영하여 아래 식을 도출함

$$n_{a,t}^e = (1 - \delta_{a-1,t-1}) \left(s_{a-1,t-1} - \frac{E_{a,t}}{N_{a-1,t-1}} + \frac{I_{a,t}}{N_{a-1,t-1}} \right) n_{a-1,t-1}^e + \hat{x}_{a,t} n_{a,t}^s$$

○ 위 식을 통해 코호트 총 일자리 소멸률을 $\hat{\delta}_{a,t}$ 으로 정의한 후, 아래 식을 도출함

$$n_{a,t}^e = \underbrace{(1 - \delta_{a-1,t-1}) \frac{N_{a,t}}{N_{a-1,t-1}}}_{1 - \hat{\delta}_{a,t}} n_{a-1,t-1}^e + \hat{x}_{a,t} n_{a,t}^s = (1 - \hat{\delta}_{a,t}) n_{a-1,t-1}^e + \hat{x}_{a,t} n_{a,t}^s$$

□ 위 과정에서 유입 및 유출 이민자 수 대신 총인구수만 필요하며, 이를 위해 총 탐색 노력 $n_{a,t}^s(N_{a,t}q_{a,t}^s)$ 과 재정의된 전체 인구의 일자리 소멸률 $\hat{\delta}_{a,t}$ 이 필요함

○ 위 과정에서 기업의 일자리 소멸률 δ_t^n 와 연계되며, δ_t^n 는 기업 문제에서 설정한 가정으로 연령 분포에 걸쳐 집계된 비율이며 모든 기업에 동일하게 적용됨

$$(1 - \delta_t^n) = \frac{\sum_a (1 - \hat{\delta}_{a,t}) n_{a-1,t-1}^e}{\sum_a n_{a-1,t-1}^e} = \frac{\sum_a (1 - \hat{\delta}_{a,t}) n_{a-1,t-1}^e}{n_{t-1}^e}$$

○ 위 식을 반영하여 n_t^e 을 산출하면 아래 식과 같음

$$n_t^e = (1 - \delta_t^n) n_{t-1}^e + \hat{x}_t n_t^s$$

〈표 II-5〉 노동시장 변수의 코드명: 가계

η^n	eDeltag
η^h	eh
δ_a	rSeparation[a,t]
δ_t^n	rSeparation[aTot,t]
$\hat{x}_{a,t}$	rJobFinding[t]
$n_{a,t}^e$	nLHh[a,t]
$Z_{a,t}^{wh}$	fZh[a,t]
$\lambda_{a,t}^n$	uDeltag[a,t]
$\lambda_{a,t}^h$	uh[a,t]
$\rho_{a,t}^e$	fProdHh[a,t]
$\tau_{a,t}$	mtInd[a,t]
$h_{a,t}^e$	hLHh[a,t]
$r_{a,t}^b$	mrKomp[a,t]
$n_{a,t}^s$	nSoegHh[a,t]

출처: DREAM(2021), p. 104.

7) 이주근로자

- 총 고용에는 덴마크에 거주하는 근로자와 비거주하는 이주근로자로 구분되나, 기업이 고용할 때 거주근로자와 이주근로자를 구분하지는 않음
 - 이주근로자는 덴마크에서 일하지만 국외거주로 1년 내내 혹은 대부분 국경을 넘나드는 에이전트이며, 거주 인구 $N_{a,t}$ 의 일부인 유입 이민자 $I_{a,t}$ 와는 구분됨
 - 이주근로자는 모형 내에서 소비하고 저축하며, 매칭 함수에 탐색 투입물 $n_{a,t}^{s,f}$ 을 투입하여 이주근로자의 고용 $n_{a,t}^f$ 를 생성하고, 거주근로자와 동일한 일자리 소멸률, 사망률 그리고 이민율을 적용받음
 - 이주근로자는 일자리가 소멸되지 않는 한 고용이 유지되며 현지 소비 혹은 주택을 요구하지는 않으나, 거주근로자와 생산성 및 근로시간이 다를 수 있음
- 이주근로자는 거주근로자와 동일한 구직률 \hat{x}_t 에 적용받으며 고용된 이주근로자 수의 운동법칙은 아래 식으로 나타냄

$$n_t^f = (1 - \hat{\delta}_t)n_{t-1}^f + \hat{x}_t n_t^{s,f}$$

- 덴마크 내 고용 혹은 구직을 위해 국경을 넘나드는 사람의 전체 수 N_t^f 은 아래 식으로 나타냄

$$N_t^f = (1 - \hat{\delta}_t)n_{t-1}^f + n_t^{s,f}$$

- 외생적으로 구직 탐색하는 이주근로자의 전체 수 $n_t^{s,f}$ 은 아래 식으로 나타냄

$$n_t^{s,f} = N_t^f - (1 - \hat{\delta}_t)n_{t-1}^f$$

- 구직률이 높아질수록 잠재적인 이주근로자가 보다 많이 취직되며, 다음 기간에 이주 근로자의 탐색 투입물이 감소함
- 이주근로자는 기업과 매칭 함수를 통해 본 모형에 투입되기에 연령 분해와 관련이 없으며, 총 기여도만 중요하기에 연령분포가 거주자와 동일하다고 가정함

〈표 II-6〉 노동시장 변수의 코드명: 이주근로자

n_t^f	nLUdl[t]
$n_t^{s,f}$	nSoegUdl[t]
N_t^f	nSoegBaseUdl[t]

출처: DREAM(2021), p. 105.

나. 기업

- 각각의 민간 부문 j 에서 질량이 1인 동일한 기업이 존재하며, 기업의 고용은 거주근로자와 이주근로자를 합한 수치로 주어짐
 - 민간 부문 j 의 총 근로자 $n_{j,t}$ 는 총 생산시간 $\bar{\rho}_t \bar{h}_t n_{j,t}$ 에 기여하며 $\bar{\rho}$ 는 생산 요인, \bar{h} 는 기업의 시간 요인임. $\bar{\rho}$ 와 \bar{h} 에서의 바(̄)는 기업 내부의 객체와 가계의 최적화 문제에서 산출한 변수와 구분하기 위한 것임
- 기업의 채용과 경제 전반의 매칭 함수 m_t 는 기업의 채용을 충족시켜주며, 이 과정은 t 기에 이뤄짐. 완료 후 현재의 고용이 결정되며 t 기 말에 생산이 발생함
 - 기업의 노력 혹은 활용의 선택은 근로자당 경기순행적 부가가치를 생성하기 위해 본 모형에 추가됨

1) 객체

- 기업이 지급한 임금 \hat{w} 에는 자영업자 비율 $\tau_t^L(1 - r_{j,t}^{self})$, 임금 실지금액 \bar{w}_t , 부문별 상대 임금 요인 $\rho_{j,t}^w$, 평균 생산성 $\bar{\rho}$ 와 시간 총량 \bar{h} 로 보정된 급여세가 포함됨

$$\hat{w}_{j,t} = \bar{w}_t (1 + \tau_t^L (1 - r_{j,t}^{self})) \rho_{j,t}^w \bar{\rho}_t \bar{h}_t$$

- 다른 유용한 객체는 생산에 투입된 생산적 노동 투입물의 총량 L 로, 생산함수 내부에 포함되어 있음

- L 에는 외생적 노동 증대 생산성 요인 z_t , 내생적 생산 요인 가동률 u_t , 부문별 상대 임금 요인 $\rho_{j,t}^w$, 개인별 생산성 및 개인별 시간 총량 $\bar{\rho}_t \bar{h}_t$ 그리고 고용 프로세스 χ 에서 활용되는 고용 비율의 내생적 보정 또한 포함됨
- 고용 비용은 생산 중 발생한 노동손실의 단위로 정의되며, 실제 산출물을 생산하는 전체 생산자 수는 $(1 - \chi)n$ 으로 나타냄

$$L_{j,t} = z_{j,t} u_{j,t} \rho_{j,t}^w \bar{\rho}_t \bar{h}_t (1 - \chi_{j,t}) n_{j,t}$$

- 위의 식의 일부 객체를 아래 식과 같이 보조 객체 ξ 로 나타냄

$$\xi_{j,t} = z_{j,t} u_{j,t} \rho_{j,t}^w \bar{\rho}_t \bar{h}_t$$

- 기업의 선택 변수는 근로자 수이며, 이에 대한 도함수는 아래 식과 같이 나타냄

$$\frac{\partial L_{j,t}}{\partial n_{j,t}} = \xi_{j,t} \left(1 - \frac{\partial(\chi_{j,t} n_{j,t})}{\partial n_{j,t}} \right)$$

$$\frac{\partial L_{j,t+1}}{\partial n_t^t} = - \xi_{j,t+1} \frac{\partial(\chi_{j,t+1} n_{j,t+1})}{\partial n_{j,t}}$$

2) 구인공고 비용(Vacancy posting costs)

- 민간 부문 j 내 기업은 일자리를 게시하여 고용 n 을 발생시키며, n 의 운동법칙은 아래와 같음

$$n_{j,t} = (1 - \delta_t^n) n_{j,t-1} + m_t v_{j,t}$$

- 구인광고 비용은 고용 단위로 발생하며, $\chi_{j,t}n_{j,t}$ 가 선형 및 2차 구성 요소를 포함한 구인광고에 대한 총비용과 동일해지도록 내생적 보조 변수 χ 를 정의함
- 2차 항은 도함수라는 것도 중요하지만, 그 크기가 비록 작음에도 불구하고 선형 객체이기 때문에 항상 0에 가까워진다는 것을 고려해야 함

$$\chi_{j,t}n_{j,t} = \kappa v_{j,t} + \lambda m_t v_{j,t} + \frac{\gamma}{2} n_{j,t} \left[\frac{n_{j,t}}{n_{j,t-1}} / \frac{n_{j,t-1}}{n_{j,t-2}} - \alpha_t \right]^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\chi_{j,t}n_{j,t})}{\partial n_{j,t}} &= \frac{\kappa}{m_t} + \lambda \frac{m_t v_{j,t}}{n_{j,t-1}} \\ &+ \frac{\gamma}{2} \underbrace{\left[\frac{n_{j,t}}{n_{j,t-1}} / \frac{n_{j,t-1}}{n_{j,t-2}} - \alpha_t \right]^2}_{\approx 0} + \gamma \frac{n_{j,t}}{n_{j,t-1}} / \frac{n_{j,t-1}}{n_{j,t-2}} \left[\frac{n_{j,t}}{n_{j,t-1}} / \frac{n_{j,t-1}}{n_{j,t-2}} - \alpha_t \right] \\ \frac{\partial(\chi_{j,t}n_{j,t})}{\partial n_{j,t-1}} &= -(1 - \delta_t^n) \left[\frac{\kappa}{m_t} + \lambda \right] - 2\gamma \frac{n_{j,t}}{n_{j,t-1}} \left[\frac{n_{j,t}}{n_{j,t-1}} / \frac{n_{j,t-1}}{n_{j,t-2}} \right] \left[\frac{n_{j,t}}{n_{j,t-1}} / \frac{n_{j,t-1}}{n_{j,t-2}} - \alpha_t \right] \end{aligned}$$

3) 고용 선택 및 노동의 사용자비용

- 기업은 일자리 게시를 통해 근로자를 채용하며, 근로자는 시간 및 생산성에 연계되어 있으며, 기업의 선택 변수는 n 으로 나타내고, 최적의 고용 결정과 관련된 현재 이익은 아래 식으로 나타냄

$$\pi_t^j = (1 - \tau_{j,t}^c) \{ p_{j,t}^0 Q^j(L_{j,t}) - \hat{w}_{j,t} n_{j,t} \}$$

- 법인세는 외연적이며, 가격 p_t^j 와 지급된 임금을 기반으로 산출한 기타 세수 및 보조금은 내연적이며, 부문별로 구분되어 있음
- 고용에 대한 1계 조건은 아래 식과 같이 나타냄

$$(1 - \tau_{j,t}^c) p_{j,t}^L \frac{\partial L_{j,t}}{\partial n_{j,t}} + (1 - \tau_{j,t+1}^c) \beta_{t+1} p_{j,t+1}^L \frac{\partial L_{j,t+1}}{\partial n_{j,t}} - (1 - \tau_{j,t}^c) \hat{w}_{j,t} = 0$$

- 사용자비용은 최적화 가격 p^0 에서 평가되는 물적 한계생산물의 가치로 정의함

$$p_{j,t}^L \equiv p_{j,t}^0 Q_{L_t}^j$$

- 위의 식은 객체 L 의 사용자비용에 대한 식으로, 여기서 L 은 단순히 노동을 의미하는 것이 아니라 생산 단위에서 실효 노동투입물로 이뤄진 활용 총량임
- 또한 본 모형은 객체 L 내부의 구인공고비용을 고려하기 때문에 사용자비용의 개념은 비교적 덜 명확함
- 그럼에도 불구하고 사용자비용은 대개 임금에 고용비용을 반영하는 양의 값을 합한 값으로 대략적으로 $p^L \approx (1 + \chi)w$ 로 나타냄
 - χ 의 평균값은 본 모형 내 임금설정 부분의 협상력 모수와 연계되어 있음

4) 대수적 표현

- 대수적 표현은 1계 조건이 코드와 유사하게 만들어지는 것처럼 수식의 일부 항을 외연적으로 만드는 데 유용함
 - L 의 도함수를 구체화하고 이를 ξ 로 나누어 아래 식을 산출함

$$p_{j,t}^L \left(1 - \frac{\partial(\chi_{j,t} n_{j,t})}{\partial n_{j,t}} \right) = \frac{\hat{w}_{j,t}}{\xi_{j,t}} + D_{j,t+1}^n p_{j,t+1}^L \left(\frac{\partial(\chi_{j,t+1} n_{j,t+1})}{\partial n_{j,t}} \right)$$

- $D_{j,t+1}^n$ 는 할인율로 아래 식으로 나타냄

$$D_{j,t+1}^n \equiv \beta_{t+1} \frac{(1 - \tau_{j,t+1}^c) \xi_{j,t+1}}{(1 - \tau_{j,t}^c) \xi_{j,t}} = \beta_{t+1} \frac{(1 - \tau_{j,t+1}^c) z_{j,t+1} u_{j,t+1} \rho_{j,t+1}^w \bar{\rho}_{t+1} \bar{h}_{t+1}}{(1 - \tau_{j,t}^c) z_{j,t} u_{j,t} \rho_{j,t}^w \bar{\rho}_t \bar{h}_t}$$

- $\frac{\hat{w}_{j,t}}{\xi_{j,t}}$ 의 수식에서 각 항을 약분하면 아래와 같음

$$\frac{\hat{w}_{j,t}}{\xi_{l,t}} = \frac{w_t}{z_{j,t} u_{j,t}} \frac{(1 + \tau_t^h (1 - r_{j,t}^{self}))}{z_{j,t} u_{j,t}} = \bar{w}_t \Gamma_{j,t}^L$$

- 객체 $\frac{\hat{w}_{j,t}}{\xi_{j,t}}$ 은 좌변의 객체 $p_{j,t}^L$ 와 동일한 성장 속성을 가지며, $p_{j,t}^L$ 는 사용자비용 객체로 모형 전체에서 비율 π 로 증가하며, 보조 변수 $\xi_{j,t}$ 내부에 포함된 변수 $z_{j,t}$ 는 실질 비율 g 에 따라 증가함
- 이는 임금 \bar{w}_t 는 단순히 가격이 아니라 비율 $(1 + g)(1 + \pi)$ 로 증가하는 가치 객체

(value object)임을 의미하며, 코드상에서 임금 \bar{w}_t 가 w 가 아니라 vw 로 표시되는 이
유임

- 고용이 비록 미래지향적인 동태적 결정임에도 불구하고 충격에 대한 반응으로 기업의 1계 조건을 객체를 외생화하여 준정적(quasi-static) 수식으로 변형시킴

$$\beta_{t+1} \frac{p_{j,t+1}^L}{p_{j,t}^L}$$

- 위 식을 활용하여 아래 식을 산출함

$$D_{j,t+1}^n \frac{p_{j,t+1}^L}{p_{j,t}^L}$$

- 위 식을 고용에 대한 1계 조건에 대입하면 아래 식을 도출함

$$1 - \frac{\partial(\chi_{j,t} n_{j,t})}{\partial n_{j,t}} = \frac{\hat{w}_{j,t}}{p_{j,t}^L \xi_{j,t}} + \underbrace{D_{j,t+1} \frac{p_{j,t+1}^L}{p_{j,t}^L}}_{\text{}} \left(\frac{\partial(\chi_{j,t+1} n_{j,t+1})}{\partial n_{j,t}} \right)$$

- 도함수 $\frac{\partial(\chi_{j,t+1} n_{j,t+1})}{\partial n_{j,t}}$ 에 내생적 변수가 포함되면, 1계 조건은 미래지향적 행위를 지속적으로 유지함

5) CES 최적화와의 연계

- 동태적 1계 조건은 기업의 전반적인 문제를 해결하는 데 사용되는 CES 최소화 문제에 투입물을 제공하며, CES 함수는 아래 식으로 나타냄

$$p_t^{kl,j} Q_{j,t}^{kl} \equiv p_t^{kl,j} \left[(\mu_{j,t}^k)^{\frac{1}{E}} (u_{j,k} K_{j,t})^{\frac{E-1}{E}} + (\mu_{j,t}^l)^{\frac{1}{E}} (L_{j,t})^{\frac{E-1}{E}} \right]^{\frac{E}{E-1}}$$

- CES 문제의 예산 측면에서 실제 사용된 노동 관련 총비용은 l 로 나타내며, 객체 $p_{j,t}^L$ 는 L 의 사용자비용임

$$p_{j,t}^{kl} Q_{j,t}^{kl} \equiv p_{j,t}^L L_{j,t} + p_{j,t}^K K_{j,t}$$

- CES 최적화 문제 내에서 $L_{j,t}$ 에 미분을 취하여 아래 식을 산출함

$$L_{j,t} = \mu_{j,t}^l Q_{j,t}^{kl} \left(\frac{p_{j,t}^L}{p_{j,t}^{kl}} \right)^{-E}$$

- 마지막 항등식은 CES 문제와 최적화 문제의 일치 여부와 L 의 사용자비용 그리고 일 자리의 최적 선택 사이의 관계를 보여주며, 자본에 대한 동반 수식(companion expression)은 아래와 같음

$$u_t^k K_{j,t} = \mu_{j,t}^k Q_{j,t}^{kl} \left(\frac{p_{j,t}^K}{p_{j,t}^{kl}} \frac{1}{u_t^k} \right)^{-E}$$

다. 매칭 마찰(Matching friction)

- 연령별 근로자의 채용률 $\hat{m}_{a,t}$ 을 모형화하는 대신 구직률 $\hat{x}_{a,t}$ 을 모형화함

$$\hat{x}_{a,t} = \mu_a \left[\frac{\left(\frac{v_t}{n_t^{s,agg}} \right)^\alpha}{1 + \left(\frac{v_t}{n_t^{s,agg}} \right)^\alpha} \right]$$

- 구직 중인 총 근로자의 탐색 노력 총량 $n_t^{s,agg}$ 은 경제 내 모든 기업이 창출하는 일자리 총량과 일치하며, 비율 변수는 총 노동시장 경직도 θ_t 로 나타냄
- 구직률은 0과 1 사이에 있도록 $0 < \mu_a \leq 1$ 로 설정하며, 구직률 1은 $\frac{v_t}{n_t^{s,agg}}$ 가 무한 대일 때만 가능하기에 전체 근로자가 모두 구직에 성공하는 것은 불가능함
- $\alpha < 1$ 이면 충격에 대한 고용의 반응이 약화되기에 $0 < \alpha \leq 1$ 으로 설정함
- 구직률이 모든 연령별로 동일하다고 단순하게 가정하면 모수는 $\mu_a = \mu = 1$ 과 $\hat{x}_{a,t} = \hat{x}_t$ 으로 설정되며, 객체 $\hat{m}_{a,t}$ 은 아래의 항등식으로 나타낼 수 있음

$$n_{a,t}^{s,agg} \hat{x}_t = \hat{m}_{a,t} v_t$$

- 위 가정하에 연령별 총 탐색 노력은 $\sum_a n_{a,t}^{s,agg} = n_t^{s,agg}$ 으로 나타낼 수 있으며, 구직에

성공한 근로자의 탐색 노력 총량은 아래 식으로 나타낼 수 있음

$$\hat{x}_t n_{a,t}^{s,agg} = \sum_a \hat{m}_{a,t} v_t = m_t v_t$$

- 총 일자리가 주어지면 위의 관계를 역으로 반전시켜 총 채용률 m_t 를 사용할 수 있으며, 구직률과 다르게 m_t 는 1 이상도 나타나기에 확률이라 할 수 없으나, 모형 내에서는 1보다 작게 보정됨

라. 총량에 대한 대수적 표현

1) 수량

- 연령 a 세인 근로자의 고용은 거주근로자와 이주근로자의 합계($n_{a,t} = n_{a,t}^e + n_{a,t}^f$)이며, 이 주근로자는 전 부문에 걸쳐 아래 식이 적용되도록 부문별로 비례 할당됨

$$n_t = n_t^e + n_t^f = \sum_a n_{a,t}^e + n_t^f = \sum_a q_{a,t}^e N_{a,t} + n_t^f$$

- 총 탐색 노력을 나타내면 아래 식과 같음

$$n_t^{s,agg} = \sum_a n_{a,t}^{s,agg} = \underbrace{n_t^{s,f}}_{Migrants} + \underbrace{\sum_a q_{a,t}^s N_{a,t}}_{Residents} = \underbrace{n_t^{s,f}}_{Migrants} + \underbrace{\sum_a n_{a,t}^s}_{n_t^s \text{ Residents}}$$

2) 평균

- 시간, 생산성, 세율의 경우, 비례 가정을 활용하여 산출함
- 이주근로자의 시간은 요인 μ_h 와 생산성은 요인 μ_ρ 만큼 균등하게 상이하며, 기업의 평균 시간은 $\bar{h}_t n_t (\sum_a (h_{a,t}^e n_{a,t}^e + h_{a,t}^f n_{a,t}^f))$ 을 기반으로 아래 식으로 나타냄

$$\bar{h}_t^e = \frac{\sum_a (h_{a,t}^e n_{a,t}^e)}{n_t^e}$$

$$\bar{h}_t = \left[\frac{n_t^e + \mu_h n_t^f}{n_t} \right] \bar{h}_t^e$$

- 거주근로자의 제품(product) 평균값 ρh 는 아래 식으로 나타냄

$$\bar{\rho}_t^e \bar{h}_t^e = \frac{\sum_a h_{a,t}^e \rho_{a,t}^e n_{a,t}^e}{\sum_a n_{a,t}^e} = \frac{\sum_a h_{a,t}^e \rho_{a,t}^e n_{a,t}^e}{n_t^e}$$

- 이주근로자는 거주근로자의 ρh 와 다른 평균값을 가지며 아래 식으로 나타냄

$$\bar{\rho}_t^f \bar{h}_t^f = \frac{\sum_a \mu_h h_{a,t}^e \mu_\rho \rho_{a,t}^e n_{a,t}^f}{\sum_a n_{a,t}^f} = \mu_\rho \mu_h \bar{\rho}_t^e \bar{h}_t^e$$

- 기업의 전체 평균 요인은 다른 모집단의 가중치에 의해 결정됨

$$\bar{\rho}_t \bar{h}_t = \frac{n_t^e \bar{\rho}_t^e \bar{h}_t^e + n_t^f \bar{\rho}_t^f \bar{h}_t^f}{n_t^e + n_t^f} = \frac{n_t^e + \mu_\rho \mu_h n_t^f}{n_t} \bar{\rho}_t^e \bar{h}_t^e$$

- 소득세 평균은 아래 식과 같이 정의할 수 있음

$$\bar{\tau}_t = \frac{\sum_a \tau_{a,t} \rho_{a,t}^e h_{a,t}^e n_{a,t}^e + \sum_a \tau_{a,t} \rho_{a,t}^f h_{a,t}^f n_{a,t}^f}{\bar{\rho}_t \bar{h}_t n_t}$$

3) 운동법칙

- 기업은 고용 n_t 를 가지며, n_t 는 일자리 소멸률을 적용하여 아래 식으로 나타냄

$$n_t = (1 - \delta_t^n) n_{t-1} + m_t v_t$$

- 이주근로자에 거주근로자와 동일한 운동법칙을 적용하기 위해 일자리 소멸률 δ_t^n 을 아래 식으로 나타냄

$$1 - \delta_t^n = \frac{\sum_a (1 - \delta_{a-1,t-1}) \frac{N_{a,t}}{N_{a-1,t-1}} n_{a-1,t-1}^e}{\sum_a n_{a-1,t-1}^e} = \frac{\sum_a (1 - \hat{\delta}_{a,t}) n_{a-1,t-1}^e}{n_{t-1}^e}$$

- δ_t^n 는 비록 기업에는 외생적이지만 위의 식에서는 내생적임

- 기업은 고용할 사람을 선택할 수 없기에 평균 구직자를 고용하고 부문별로 동일한 연령 분포를 적용하며, 모든 기업은 동일한 일자리 소멸률에 적용받음

- 기업은 고용할 사람을 통제하지 않기에 일자리 소멸률 또한 통제하지 않음

마. 임금 결정

- 최적의 탐색 및 참여(시장 규모)와 최적의 구인공고(노동 수요)를 결정하는 방정식을 도출하기 위해 내쉬협상모형(the Nash bargaining model)을 사용함
 - 노동조합은 개별 기업 및 근로자의 구성 요소와 다소 차이가 있기 때문에 이들을 대신하여 단순화된 문제를 해결할 수 있다고 가정하며, 이는 협상 문제에 유입되는 잉여금을 설정하는 데 일정 수준의 자유도를 허용케 함

1) 임금 경직성

- 내쉬 해(Nash solution)는 임금과 생산성 사이의 비례성을 산출함
 - 기업의 잉여금은 소득(y)에서 임금(w)을 차감하여 산출하며 $J = y - w$ 로 나타내고, 근로자의 잉여금은 임금(w)에서 구직 실패 보상(b)을 차감하여 산출하며 $W = w - b = w(1 - r^b)$ 로 나타내며, 실업급여는 임금에 비례함
 - 내쉬 해는 고정비 $\frac{w}{y}$ 를 산출하며, y 의 변동에 따른 임금 경직성은 없음
- 명목임금의 단기적 경직성은 Galí and Gertler(1999)의 방법론을 활용하여 산출됨
 - Galí and Gertler(1999)에 따르면 임금 계약의 비율은 $(1 - \gamma)(1 - \theta^w)$ 로 나타내며, 임금 w 는 임금협상을 통해 재조정됨. $(1 - \theta^w)$ 은 기계적 방법으로 조정됨
 - 임금 계약의 비율($(1 - \gamma)(1 - \theta^w)$)은 지연된(lagged) 임금 인플레이션을 위해 마지막 기간에 업데이트된 임금 계약의 평균과 동일하게 조정함
 - 기업 및 가계에 대한 관련 임금은 평균 임금 \bar{w}_t 이며, 아래 식으로 나타냄

$$\bar{w}_t = \gamma \bar{w}_{t-1} + (1 - \gamma) w_t^*$$

$$w_t^* = (1 - \theta^w) \omega + \theta^w w_{t-1}^* \frac{\bar{w}_{t-1}}{w_{t-2}}$$

- 계약된 임금은 현재 기간 내 만들어진 매칭뿐만 아니라 이전 기간에서 현재까지 변동이 없이 이어진 일자리 매칭에도 영향을 미침
 - 위의 특징은 문제를 복잡하게 만들며, 이를 통제하기 위해 임금 계약은 매 기간마다 근로자와 기업에 무작위로 할당된다고 가정함
 - 임금 계약의 무작위 할당은 기업이 구직 중인 평균 근로자를 고용할 수 있게 만들뿐만 아니라 고용된 평균 근로자와 평균 임금 계약을 맺게 함
 - 명목 경직성은 오직 주어진 것으로 여겨지는 평균 임금을 통해 기업의 결정에 영향을 미치며, 기업은 평균 구직자를 고용하고 평균 임금 계약을 진행하기에 기업의 임금 지급은 평균 임금 \bar{w}_t 로 이뤄짐

- 노동시장 참여에 대한 근로자의 결정은 노동시장에서 제시된 평균 임금 계약의 함수로 나타냄
 - 근로자는 고용에 대한 어떤 특징도 사전에 선택할 수 없다고 가정하며 시간은 평균 임금의 함수라고 가정함

2) 협상

- 협상 방정식에 투입되는 잉여금 $S_t(w)$ 는 협상 게임 내에서의 일치값에서 불일치값을 차감하여 산출함

$$S_t(w) = (1 - \bar{\tau}_t) \omega n_t \bar{\rho}_t \bar{h}_t (1 - \gamma)(1 - \theta^w) + \beta_{t+1} \gamma S_{t+1}(w)$$

- 불일치값은 균형 외의 사건으로 관측되지 않은 값이며, 근로자를 대표하는 조합의 경우 $S_t(w)$ 는 협상 중인 모든 계약($n_t \bar{\rho}_t \bar{h}_t (1 - \gamma)(1 - \theta^w)$)을 통해 측정되며, $\bar{\tau}_t$ 는 개인 소득세율의 가중평균임
- 위의 방정식은 협상 중인 임금에 비례하기에 $S_t(w) = w(1 - \gamma)(1 - \theta^w) \times \tilde{S}_t^+$ 혹은 아래 식으로 나타낼 수 있음

$$\tilde{S}_t^+ = (1 - \bar{\tau}_t) n_t \bar{\rho}_t \bar{h}_t + \beta \gamma \tilde{S}_{t+1}^+$$

- 근로자의 w 에 대한 도함수는 $\frac{\partial S_t(w)}{\partial w} = (1-\gamma)(1-\theta^w)\tilde{S}_t^+$ 에 의해 주어지며, 이는 평균 시간과 고용에 대한 w 의 기여도를 무시한 것임. 대규모의 독점 노조는 이러한 효과를 내재화한다고 가정함

- 기업 측면에서 잉여금은 모든 부문 j 에서 집계되며, 벨만 방정식을 따라 아래 식으로 나타냄

$$J_t(\omega) = (1-\tau_t^e)(1-\gamma)(1-\theta^w)\bar{\rho}_t\bar{h}_t[J_t^{0+} - \omega J_t^{0-}] + \tilde{\beta}_{t+1}\gamma J_{t+1}(\omega)$$

$$J_t^{0+} \equiv \sum_j P_{j,t}^L z_{j,t} \rho_{j,t}^w n_{j,t}, \quad J_t^{0-} \equiv \sum_j \rho_{j,t}^w n_{j,t} (1 + \tau_t^L (1 + r_{j,t}^{self}))$$

- 위 방정식에서 음(-)의 부분을 풀어 쓰면 아래 식과 같음

$$\tilde{J}_t^- = (1-\tau_t^e)\bar{\rho}_t\bar{h}_t[J_t^{0-}] + \tilde{\beta}_{t+1}\gamma\tilde{J}_{t+1}^-$$

- 위 과정을 거쳐 아래 식을 산출함

$$\frac{\partial J_t(\omega)}{\partial \omega} = -(1-\gamma)(1-\theta^w)\tilde{J}_t^-$$

- 잉여금의 양(+)의 부분은 기업의 1계 조건에서 한계생산을 통해 w 를 내연적으로 포함하나, 이러한 효과는 협상 과정에서 무시됨

$$\tilde{J}_t^+ = (1-\tau_t^e)\bar{\rho}_t\bar{h}_t[J_t^{0+}] + \tilde{\beta}_{t+1}\gamma\tilde{J}_{t+1}^+$$

- 내쉬의 최적성 조건(Nash optimality condition)은 아래 식과 같음

$$\frac{1-\phi^{Barg}}{S_t} \frac{\partial S_t}{\partial \omega} + \frac{\phi^{Barg}}{J_t} \frac{\partial J_t}{\partial \omega} = (1-\phi^{Barg})\frac{1}{\omega} - \phi^{Barg} \frac{\tilde{J}_t^-}{J_t^+ - \omega\tilde{J}_t^-} = 0$$

- 위 식을 축약하면 아래 식과 같음

$$\omega = (1-\phi^{Barg})\frac{J_t^+}{\tilde{J}_t^-}$$

〈표 II-7〉 노동시장 변수의 코드명: 기업

$n_{s,t}$	nL[s,t]
κ_t	uOpslagOmk
γ	uOpslagOmkSqr
m_t	rMatch[t]
$\chi_{s,t}$	rOpslagOmk[s,t]
$\frac{\partial(\chi_{s,t}n_{s,t})}{\partial n_{s,t}}$	dOpslagOmk2dnL[s,t]
L_t	qL[t]
$\frac{\partial L_{s,t+1}}{\partial n_{s,t}}$	dqLLead2dnL[s,t]
$p_{s,t}^L$	pL[s,t]
$t_{s,t}^c$	tSelskab[t]
$\frac{1}{\beta_t} - 1$	rVirkDisk[t]
$u_{s,t}$	rLUdn[s,t]
η_u	eLUdn

출처: DREAM(2021), p. 110.

5. 수출

- 대부분의 수출품은 국내에서 생산되는 반면, 일부 수출품은 해외로 즉시 재수출되는 운송 품으로써 일반적인 수출품과는 별도로 구분됨
 - 즉시 재수출되는 상품들은 덴마크를 거쳐 가는 과정에서 부가가치가 발생하므로 일반적인 수입 및 수출품의 가치평가와는 구분됨
- 본 모형에서는 수출 항목을 5개 분야 물품 및 요소인 에너지·재화·해양운송·서비스·관광으로 구분하였음
 - 〈표 II-8〉은 항목별 국내 생산품의 총 수출이 시간이 지남에 따라 점진적으로 변화하는 것을 나타냄
 - 덴마크 경제는 지속적으로 성장하고 있으며 2017년 기준 전체 수출품 중 54%는 재화(goods)이며, 관광과 에너지는 약 8%를 차지
 - 국내 생산품 수출은 GDP 대비 1980년 30%에서 2017년 46%로 증가하였으며, 즉시

재수출되는 수입품은 GDP 대비 1980년 2.2%에서 2017년 8.6%로 증가함

- 본 절에서 모형 내 수출과 관련된 요인을 통해 덴마크의 수출 증가 추세를 예측하여 미래의 수출수요를 알아봄

가. 국내 생산재 수출

1) 5개 분야 수출 항목에 대한 수요

- 5개 분야의 수출 항목에 대한 수요곡선은 Armington 모형(1969), Anderson(1979)과 Anderson and Van Wincoop(2003)의 중력방정식(the Gravity equations)에 기반함
 - 단일 Armington 모형을 사용하면 소규모 개방경제에서의 특정 재화에 대한 수출수요를 설명할 수 있음
 - 모형에서 수출에 대한 수요는 외생적이며 경험에 의한 실증적 결과에 기반함
- 5개의 수출 항목 $X_{x,t}^y$ 에 대하여 각각의 식이 있으며, 각 수출재 x 는 국내에서 생산되는 재화 y 로부터 공급됨

$$X_{x,y}^y = \mu_{x,t}^{X,y} Q_{x,t}^{XM} q_t^{Scale} (R_{x,t}^X)^{-\eta_x^X}$$

- Anderson(1979)의 CES 수요 문제와 같이 수출은 탄력성이 η_x^X 인 가격비율 $R_{x,t}^X$ 와 관련이 있으며, 시장 규모 $Q_{x,t}^{XM}$ 는 수출품을 소비하는 해외 소비자들의 총소득과 비슷함 - 따라서 5개 분야의 수출 항목 식은 가계 혹은 기업에서 비롯된 CES 수요곡선과 유사함
- 규모 변수 q_t^{Scale} 는 덴마크 경제 성장을 측정하며, 수출수요에 '자체 수요를 생산하는 공급 (supply generating its own demand)' 요소를 추가함

$$q_t^{Scale} = (L_t^p)^{1-\alpha} (q_{t-1}^{Scale})^\alpha$$

- q_t^{Scale} 는 Anderson and Van Wincoop(2003)에서 파생된 중력 모형(the gravity model) 솔루션에 따라 도입
- CES 목적함수를 극대화하여 도출된 수요곡선은 공급 측의 수입을 제외한 부분 균형 객체(a partial equilibrium object)임

- 그러나 Eaton and Kortum(2002), Melitz(2003)에서 제안한 방식으로 본 수출입 모델에서 수요곡선의 공급에 대한 수입을 포함시킬 것임
 - MAKRO 모델은 국제무역 균형을 찾는 것이 아니며 축소된 형태로써 이 기능을 포함
 - 본 절은 수출수요곡선에 대한 결과를 도출하기 위함이 아니라 무엇이 수출량을 주도하는지 알아보는 것이 목적임

- 시장규모 변수 $Q_{x,t}^{XM}$ 은 ADAM 데이터를 기반으로 수출시장 $q_{x,t}^{XM}$ 의 규모를 포함한 동태적 구조로 구성되었으며 $\varphi = 0.29$ 임

$$Q_{x,t}^{XM} = (q_{x,t}^{XM})^{1-\varphi} (Q_{x,t-1}^{XM})^\varphi$$

- 가격비율 $R_{x,t}^X$ 는 각 분야의 수출가격 $P_{x,t}^{Xy}$ 를 사용하며, 수출경쟁가격 $P_{x,t}^{XF}$ 에 비례하는 상대적 가격비율 구성임
 - 해외 가격 $P_{x,t}^{XF}$ 는 각 해외 수출시장에 대한 국제가격이며 외생적임
 - 국내 수출가격 $P_{x,t}^{Xy}$ 는 수출재 X 가 국내 9개 분야의 생산 부문으로부터 조달받는 것을 반영하며 그 구성은 모수 $u_{x,s,t}^{IOy}$ 로 요약됨

$$p_{x,t}^{Xy} = \sum_{s \in y(x)} u_{x,s,t}^{IOy} p_{x,s,t}^{IOy}$$

- $y(x) \equiv d_1^{IOy}(x,s,t)$ 는 특정 수출재 x 의 제조와 연관된 9개 생산 부문의 하위집합을 나타냄
 - 이 식은 5개 수출 품목의 부분 집합 x 를 정의하는 집합 $d_1^{Xy}(x,t)$ 에 의해 추가로 조정됨
- 가격비율 객체 $R_{x,t}^X$ 은 다음과 같이 구성되며, $\gamma = 12$ 이고 β 는 할인 요인임

$$R_{x,t}^X = \frac{P_{x,t}^{Xy}}{P_{x,t}^{XF}} - \gamma R_{x,t}^X \left[\frac{R_{x,t}^X}{R_{x,t-1}^X} - 1 \right] \frac{R_{x,t}^X}{P_{x,t-1}^X} + \beta_{t+1} \gamma R_{x,t+1}^X \left[\frac{R_{x,t+1}^X}{R_{x,t}^X} - 1 \right] \left[\frac{R_{x,t+1}^X}{R_{x,t}^X} \right] \left[\frac{X_{x,t+1}^y}{X_{x,t}^y} \right] \frac{P_{t+1}^{XF}}{P_t^{XF}}$$

- 이러한 구성은 첫째 수출수요에 대해 미래지향적 요소를 나타내며, 둘째 덴마크 수

출품을 구매하는 외국기업을 고려하여 도출했으며, 셋째 독점적 경쟁과 가격경직성 특징을 띠는 시장에서 소비자에게 판매할 때 최적의 가격 설정 문제를 해결함

- 이 구성은 국내 수출가격 $P_{x,t}^{Xy}$ 또는 수출 경쟁가격 $P_{x,t}^{XF}$ 의 변동을 허용하는 표준 수요식을 통해 얻는 효과보다 더 동태적이고 미묘한 방식으로 수출량에 영향을 미칠 수 있다는 유용함이 있음
- 수출 탄력성 η_s^X 는 5.6의 값을 가진 에너지 부문을 제외하고 모형 내 모든 품목에 대해서 5로 설정되어 있음
 - 수출 탄력성은 MAKRO 모형의 주요 모수이며, 수출 모형이 해(solution)를 갖도록 하는 수확 체감의 원인임
- $\mu_{x,t}^{Xy}$ 는 수출시장의 규모 혹은 상대적 가격이 변하지 않더라도 특정 유형의 수출이 증가 또는 감소하는 장기적 가능성을 설명하는 모수
 - $\mu_{x,t}^{Xy}$ 이 균형인 상태에서 수출품의 평균 추세 비율을 측정함
 - 예를 들어 덴마크의 석유 수출량 $X_{x,t}$ 의 아래첨자 x 가 석유를 의미할 때, 전체 국제 석유 생산량 $Q_{x,t}^{XM}$ 에 비례함
 - $\mu_{x,t}^{Xy}$ 는 실제 사용 가능한 데이터를 기반을 예측하여 측정됨
 - 모수의 실적치는 시계열 예측 $\mu_{x,t}^{ARIMA}$ 를 사용하고, T^* 는 이용 가능한 데이터의 마지막 날짜임

$$\mu_{x,t}^{Xy} |_{t > T^*} = \mu_{x,t}^{ARIMA} \times \frac{\mu_{x,T^*}^{Xy}}{\mu_{x,T^*}^{ARIMA}}$$

- ARIMA 변수는 전망치이고 다른 변수는 실적치이므로 $\mu_{x,T^*}^{Xy} \neq \mu_{x,T^*}^{ARIMA}$ 임

2) 생산객체 구성

- 본 단락은 생산 부문 s 의 관점에서 수량객체 $X_{x,t}^y$ 와 가격객체 $P_{x,t}^{Xy}$ 의 구성을 살펴봄
- 수출은 소비와 생산과는 다르게 분류되며, 수출 품목은 국내 생산 부문과 다르게 공급된다는 점에서 국내 가계가 소비하는 재화와 차이가 있음

- 수출 항목은 표준국제무역분류(SITC, Standard International Trade Classification)의 해외무역 항목을 바탕으로 형성됨
 - 소비 항목과 생산 항목은 국민계정(NR, National Accounts)에서 정의한 그룹 항목을 기반으로 형성됨
- 투입산출 시스템은 각 산업에서 수출과 소비 항목으로 가는 모든 흐름을 기록함
 - 예를 들어 해상운송 서비스의 생산으로부터 소비와 수출 항목으로 이어지는 흐름을 파악하는 것임
 - 해상운송은 독자적인 수출 항목이지만, 국내 5가지 소비품 분류에서는 가구가 소비하는 서비스에 포함되어 분류됨
- 수량과 가격은 전체 대비 명목 비중을 나타내는 보조 요인 $f^y(x, s, t)$ 을 사용하여 구하고, 이를 통해 실질 수량을 도출
 - 두 부분의 생산 분야에서 하나의 수출재 x , $X_{x,t}$ 를 임의적으로 만든다고 가정할 때, 모수 $u_{x,s,t}$ 와 생산가격 $p_{x,s,t}$ 가 주어지면 수출재 가격은 선형으로 다음과 같이 표기

$$p_{x,t} = u_{x,1,t}p_{x,1,t} + u_{x,2,t}p_{x,2,t}$$

- 하나의 생산 부문 $q_{x,1,t}$ 의 수출재 x 의 수량과 이들의 관계를 정의하면 아래와 같음

$$p_{x,1,t}q_{x,1,t} = f_{x,1,t}p_{x,t}X_{x,t} \equiv \frac{u_{x,1,t}p_{x,1,t}}{p_{x,t}}p_{x,t}X_{x,t}$$

- 두 요인의 합은 $f_{x,1,t} + f_{x,2,t} = 1$ 이며, 생산 부문당 수량 $q_{x,s,t}$ 는 위에서 결정된 총 수량 $X_{x,t}$ 에 의해 유도되며 외생적 비율을 감소시킴

$$q_{x,1,t} = u_{x,1,t}X_{x,t}$$

- 주목해야 할 점은 생산 부문의 가격 $p_{x,s,t}$ 에 수출품 색인 x 가 포함되어 있다는 것
 - 이유는 모델에서 할당된 수출 관세가 존재하기 때문
 - 수출재를 만드는 회사에 할당되어야 할 세금은 외국 소비자에게 전가됨
- 수출용 수입품의 상대적 가치 비율을 나타내는 f 요인을 도출하는 방식은 아래와 같으며 이에 대한 결과는 <표 II-9>에 있음

$$f^y(x, s, t) \equiv u_{x,s,t} \frac{IOy_{p_{x,s,t}}}{p_{x,t}^{Xy}}$$

$$v_{x,s,t}^{IOy} \equiv f^y(x,s,t)v_{x,t}^{Xy} \equiv f^y(x,s,t)\underbrace{p_{x,t}^{Xy}q_{x,t}^{Xy}}_{value\ v_{x,t}^{Xy}} \equiv u_{x,s,t}^{IOy}p_{x,s,t}^{IOy}q_{x,t}^{Xy}$$

$$\sum_s v_{x,s,t}^{IOy} = v_{x,t}^{Xy} \underbrace{\sum_{s \in y(x)} f^y(x,s,t)}_1 = v_{x,t}^{Xy}$$

- 국내 생산 에너지 수출의 약 65%는 국내 에너지 부문에서 자체 조달되며, 약 35%는 국내 수출 부문에서 조달됨

3) 관광

- <표 II-8>에서와 같이 수출 요인 중 관광은 덴마크에서 소비하는 외국 관광객의 지출이며, 이는 GDP 대비 약 2%를 차지하며 추세가 없음
- 다른 4개 부문의 수출 품목과는 달리 관광은 수요 식에서 간접적이며, 가계 소비의 일부분으로 나타남
 - 관광객은 국내 가계와 동일한 물건을 소비하기 때문에 관광객의 수요는 국내가계와 같은 방식으로 국내 생산의 9가지 부문으로 구분됨
- 이를 식으로 표현하기 위해, 전체 관광객 수요 $X'_{xTur',t}$ 으로부터 소비 분류 c 를 할당함

$$\frac{f_c^{PCT} P_{c,t-1}^C C_{c,t}^{Tourist}}{P_{c,t-1}^{CTourist}} = \mu_{c,t}^{CTourist} P'_{xTur',t-1} X'_{xTur',t}$$

- 관광 $\mu_{c,t}^{CTourist}$ 는 국민계정 데이터에서 추출할 수 없었으므로 ADAM의 관광수출 가격 지수 $P'_{xTur',t-1}$ 을 차용하여 사용함
 - 전체 관광객의 수요량 $X'_{xTur',t}$ 는 연쇄지수 방법으로 접근하여 데이터를 구성하였으며, 이는 절하된 가격임

$$\sum_c P_{c,t}^{CTourist} C_{c,t}^{Tourist} = P'_{xTur',t} X'_{xTur',t}$$

- f_c^{PCT} 의 값은 1.0022021로 매우 작은 수치이지만 관광객 소비와 자국민 소비는 다른 디플레이터(deflator)를 가지고 있다는 사실을 포착
 - f_c^{PCT} 가 값을 갖고 있지 않다면 외국관광객 소비자 가격 $P_{c,t-1}^{CTourist}$ 와 국내 소비자 가격은 동일하게 나타남

- 관광객이 사용하는 재화, 에너지, 서비스에 대한 소비 분포는 ADAM 기반이기 때문에 관광객 소비의 정확한 총 가격지수를 산출하지 못함
 - 관광객의 소비 구성과 자국민의 소비 구성은 다르므로 디플레이터 값이 존재해야 함
 - 디플레이터는 모든 항목에 대하여 균일 요인으로 수행

나. 수출용 수입(재수출)

- <표 II-9>는 GDP 대비 수출용 수입량의 상대적 가중치를 나타내며, 2017년 기준 GDP 대비 8.7%에 달하며, 이는 국내 생산품의 수출 46%와 대비됨
 - 2017년 수출용 수입 항목은 국외 제조사로부터 구매한 상품, 국외 에너지 생산업체로부터 구매한 에너지, 해외 해상운송 서비스로 구분됨

- <표 II-10>은 9개의 생산 부문을 5개 분야로 묶어 나타내며, 국내 생산품 $v_{x,s,t}^{IOM}$ / $(v_{x,s,t}^{IOy} + v_{x,s,t}^{IOM})$ 대비 수출용 수입의 상대적 가치의 비율을 나타냄

- 2017년 에너지 생산 분야에서 조달된 에너지 수출 총액 18.4%는 수출용 수입에서 발생함
 - 총에너지 수출 65.1% 중 18.4%가 수입된 에너지에서 발생했다는 의미로 해당 분은 위에서와 동일한 탄력성 η_x^X 과 수출시장 변수 $Q_{x,t}^{XM}$ 을 포함하여 앞의 등식과 유사하게 모델링되지만 정태적임

$$X_{x,t}^m = \mu_{x,t}^{XM} Q_{x,t}^{XM} (P_{x,t}^{XM, Rel})^{\eta_x^X}$$

- 상대가격은 운송 중인 상품에 대한 세금을 반영하여 아래와 같이 계산되며, 이 식은 $d_1^{XM}(x,t)$ 조건에서만 존재함
 - 세금 요인 $\tau_{x,s,t}^{IOM}$ 은 (x,s) 에 따라 유의하며 시점에 따라 달라짐

$$\begin{aligned} P_{x,t}^{XM, Rel} &= \sum_{s \in d_1^{IOM}(x,s,t)} \frac{u_{x,s,t}^{IOM, M} p_{s,t}^M}{P_{x,t}^{XM}} \\ &= \sum_{s \in d_1^{IOM}(x,s,t)} u_{x,s,t}^{IOM, M} p_{s,t}^M \times \underbrace{\left[\sum_{s \in d_1^{IOM}(x,s,t)} u_{x,s,t}^{IOM} p_{s,t}^{IOM} \right]^{-1}}_{P_{x,t}^{XM}} \\ &= \sum_{s \in d_1^{IOM}(x,s,t)} u_{x,s,t}^{IOM, M} p_{s,t}^M \times \left[\sum_{s \in d_1^{IOM}(x,s,t)} u_{x,s,t}^{IOM} \frac{(1 + \tau_{x,s,t}^{IOM}) p_{s,t}^M}{P_{x,s,t}^{IOM}} \right]^{-1} \end{aligned}$$

- (level parameter) 상대가격을 고려할 때 아래와 같이 관계식을 반대로 뒤집어 도출하고 일반적인 방법으로 시계열을 예측함

$$\frac{X_{x,t}^m}{Q_{x,t}^{XM}(P_{x,t}^{Xm, Rel})^{\eta_x}} = \mu_{x,t}^{Xm}$$

- 상대가격을 얻기 위해서는 하위 수준의 모수가 요구됨

다. 동태적 가격비율 도출

- Armington 방정식을 통해 수출수요를 구하고 동태적 관계 순서를 도출하여 가격비율을 결정함

$$X_t = \mu Q_t \left(\frac{\bar{P}_t^X}{P_t^F} \right)^{-E}$$

- 위 식에서 \bar{P}_t^X 는 해외 소비자가 직면한 수출가격이며, P_t^F 는 해외 생산품의 경쟁가격임
- 해외에 거주하는 중개인은 덴마크의 수출품을 P_t^X 가격에 구매하고, 소비자에게 \bar{P}_t^X 가격에 판매하며, 본 식에서는 P_t^X 과 \bar{P}_t^X 은 동일하다고 설정함
- 중개업자들은 독점적 가격 경쟁에 직면해 있으며, 가격 설정에 대한 조정 비용을 갖고 있다고 가정함

$$\bar{P}_t^X = \arg \max_{p_{i,t}} [p_{i,t} - P_t^X] X_t \left[\frac{p_{i,t}}{\bar{P}_t^X} \right]^{-\eta} - [g_t + \beta_{t+1} g_{t+1}]$$

- 각 중개인에 대한 1계 조건은 다음과 같음

$$X_t \left[\frac{p_{i,t}}{\bar{P}_t^X} \right]^{-\eta} \left(1 - \eta [p_{i,t} - P_t^X] \frac{1}{p_{i,t}} \right) - \left[\frac{\partial g_t}{\partial p_{i,t}} + \beta \frac{\partial g_{t+1}}{\partial p_{i,t}} \right] = 0$$

- 이전 수식에 대칭 균형 $p_{i,t} = \bar{P}_t^X$ 을 적용하여 표기

$$\bar{P}_t^X = \frac{\eta}{\eta-1} P_t^X - \frac{1}{\eta-1} \frac{\bar{P}_t^X}{X_t} \left[\frac{\partial g_t}{\partial p_{i,t}} + \beta \frac{\partial g_{t+1}}{\partial p_{i,t}} \right]$$

- 이러한 표현식은 완전경쟁 없이 0 또는 0에 가까운 마크업($\bar{P}_t^X - P_t^X$ 의 차이)을 갖는 것을 보여주는 반면, $\eta \rightarrow +\infty$ 와 같이 $\bar{P}_t^X \rightarrow P_t^X$ 이며, 이는 완전경쟁이 0 마크업이라는 것을 의미함

□ 앞서 언급한 해외 중개인의 가격설정에 대한 조정 비용은 다음과 같이 정의함

$$g_t \equiv \frac{\gamma}{2} \left[\frac{p_{i,t}}{P_t^F} \frac{P_{t-1}^F}{p_{i,t-1}} - 1 \right]^2 \bar{P}_t^X X_t$$

- 가격비율에 대한 정의 $R_t = \bar{P}_t^X / P_t^F$ 와 위에서 적용한 대칭 평형은 아래의 식을 산출함

$$R_t = \frac{\eta}{\eta-1} \frac{P_t^X}{P_t^F} - \frac{\gamma}{\eta-1} R_t \left[\frac{R_t}{R_{t-1}} - 1 \right] \frac{R_t}{R_{t-1}} \\ + \beta_{t+1} \frac{\gamma}{\eta-1} R_{t+1} \left[\frac{R_{t+1}}{R_t} - 1 \right] \left[\frac{R_{t+1}}{R_t} \right] \frac{X_{t+1}}{X_t} \frac{P_{t+1}^F}{P_t^F}$$

- 마지막으로 $\frac{\eta-1}{\eta}$ 을 곱하여 아래의 식을 구함

$$R_t \frac{\eta}{\eta-1} \equiv \hat{R}_t = \frac{P_t^X}{P_t^F} - \underbrace{\frac{\gamma}{\eta-1}}_{\hat{\gamma}} \hat{R}_t \left[\frac{\hat{R}_t}{\hat{R}_{t-1}} - 1 \right] \frac{\hat{R}_t}{\hat{R}_{t-1}} \\ + \beta_{t+1} \hat{\gamma} \hat{R}_{t+1} \left[\frac{\hat{R}_{t+1}}{\hat{R}_t} - 1 \right] \left[\frac{\hat{R}_{t+1}}{\hat{R}_t} \right] \frac{X_{t+1}}{X_t} \frac{P_{t+1}^F}{P_t^F}$$

- 초기 수요함수로 돌아가 보면 \hat{R}_t 비율을 사용하는 것은 수요모수 μ 를 재정의하는 것 뿐만 아니라, 조정 비용 모수도 재정의하는 것과 같다는 것을 알 수 있음

$$X_t = \underbrace{\left[\frac{\eta}{\eta-1} \right]^{-E}}_{\mu} \mu Q_t (\hat{R}_t)^{-E}$$

$$\hat{\mu} = \left[\frac{\eta}{\eta-1} \right]^{-E} \mu$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\gamma}{\eta-1}$$

- η 값은 별도로 식별할 수 없으며 이는 모형에서 중간가격설정 시장의 경쟁성을 판단할 수 없음을 의미함
 - 중요한 점은 η 이 어떠한 큰 값을 갖더라도 $\eta > 0$ 의 유한 값에 대해 잘 명시되어 있고, $\hat{\mu} \approx \mu$ 로 인해 가격비율이 현물가치 $\hat{R}_t \rightarrow P_t^X / P_t^F$ 에 근접해야 한다는 것임

〈표 II-8〉 GDP 대비 품목별 국내 생산품의 총수출 변화

연도	에너지	재화	해상운송	서비스	관광	총합
1980	0.009965	0.209866	0.030159	0.033851	0.019014	0.302856
1990	0.009869	0.220335	0.027247	0.051062	0.023638	0.332150
2000	0.026213	0.224690	0.066215	0.060894	0.021287	0.399299
2010	0.026346	0.223389	0.091160	0.072003	0.018959	0.431858
2017	0.014667	0.252829	0.082856	0.091583	0.023563	0.465498

각 수출 품목에 대한 상대적 기여도

연도	에너지	재화	해상운송	서비스	관광	총합
2017	0.0315	0.5431	0.1780	0.1967	0.0506	1

주: 1. GDP 대비 수출의 명목현재가격비율은 $p_{i,t}^{Xy} q_{i,t}^{Xy} / p_t^{GDP} Q_t^{GDP}$ 로 계산

2. 국내 생산품의 총수출가치의 코드는 $v_{x,t}^{IOy}$ 임

출처: DREAM(2021), p. 129.

〈표 II-9〉 GDP 대비 수입품 수출의 변화

연도	에너지	재화	해상운송	서비스	총합
1980	0.000316	0.021857			0.022173
1990	0.000763	0.031302		0.000016	0.032081
2000	0.001472	0.048124			0.049596
2010	0.004078	0.060029	0.007360	0.001905	0.073372
2017	0.002155	0.079128	0.005320		0.086603

주: GDP 대비 수출의 명목현재가격비율은 $p_{i,t}^{Xm} q_{i,t}^{Xm} / p_t^{GDP} Q_t^{GDP}$ 로 계산

출처: DREAM(2021), p. 129.

〈표 II-10〉 수출용 수입품의 상대적 가치

구분	생산 분야		
	생산	서비스	에너지
$X = Goods$	0.30268		
$X = Energy$			0.18421
$X = Sea T.$		0.69413	

주: 1. 2017 데이터이며 가치비율은 $v_{x,s,t}^{IOm} / (v_{x,s,t}^{IOy} + v_{x,s,t}^{IOm})$

2. $v_{x,s,t}^{IOm}$ 는 수입 즉시 수출되는 재화의 가치를 나타냄

출처: DREAM(2021), p. 129.

6. 정부

□ (개요) 이 절에서는 정부의 수입과 지출에 대해 설명함

- 지출 측면에 있는 많은 항목은 외생적이거나, 인구 또는 GDP와 같은 외생적 관계를 따름
- 수입 측면에는 특정 항목에 대한 실현 평균 세율을 결정하는 과정에 있어 지출 측면과 동일하게 상당 부분 외생적 관계를 따름

□ 정부 예산은 다음과 같이 구성

- 정부 예산은 재정수지(primary budget)와 순이자 수입의 합

$$Bdg_t = PrBdg_t + Netr_t^d$$

- 재정수지는 수입에서 지출을 뺀 순액

$$PrBdg_t = REV_t - EXP_t$$

- 수입과 지출, 순이자 수입은 다음 부문에서 설명하며, 대차대조표를 상세히 설명한 후 구조적 재정수지와 재정 지속가능성 지표에 대해 정의함

가. 수입

- (구성) 정부 수입은 직접세, 간접세 및 기타 정부 수입의 합

$$REV_t = T_t = T_t^{Direct} + T_t^{Indirect} + T_t^{Other}$$

- 직접세는 총 세수의 약 60%를 차지하고 주로 일반 소득세로 구성되며 법인세, 주택에 대한 세금 및 기타 세금은 적은 비중을 차지
- 간접세는 세수의 약 30%를 차지하며 주로 관세, 부가가치세, 생산세로 구성됨

- (표기법) y 는 소득을 나타내며 세율은 τ 로 표시하고 수입은 대문자 T 로 표시

- 예를 들어 부문별 법인세율을 $\tau_{s,t}^{Corp}$ 라고 하고 총 수입은 $T_{s,t}^{Corp}$ 로 표기
- 문서(text)에서의 세율 τ 는 코드에서의 세율 $t \times f$ 에 해당하며, 여기서 f 는 데이터에 맞는 조정 변수(adjustment variable)임
 - 이러한 조정은 세법에서 결정된 세율을 감안할 때 관찰된 평균 세율을 일치시키는 데 도움이 됨
 - 조정 계수는 때때로 필요하지 않으며 1로 설정
 - T_t^{Income} 와 같은 변수는 모든 코호트의 합계를 나타내며, 연령 첨자가 있는 해당 변수 $T_{a,t}^{Income}$ 는 코호트의 평균을 나타냄
 - 두 변수는 $T_t^{Income} = \sum_a N_{a,t} T_{a,t}^{Income}$ 로 관련되어 있으며 여기서 $N_{a,t}$ 는 모집단

1) 직접세

- 모형에서 직접세는 덴마크 「소득세법」을 면밀히 본뜬
- 경제적·인구통계적 변화는 조세부담에 영향을 미치기 때문에 직접세와 총 소득수준의 관계가 일정하지 않으므로 세제의 유연한 모델링이 필요함
- 직접세는 소득세 T_t^{Income} , 노동시장기여(노동시장세) T_t^{AM} , 기타 개인소득세 T_t^{OPers} , 자동차세 T_t^{Weight} , 법인세 T_t^{Corp} , 연기금 투자 수익에 대한 과세 T_t^{PAL} , 그리고 공공 소유 매체에 대한 기여 T_t^{Media} 로 구성²²⁾

$$T_t^{Direct} = T_t^{Income} + T_t^{AM} + T_t^{OPers} + T_t^{Weight} + T_t^{Corp} + T_t^{PAL} + T_t^{Media}$$

- 소득세에는 여러 요소가 있으며, 소득이 생애주기에 따라 변하기 때문에 소득세 수입이 변화함에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있음

$$T_{a,t}^{Income} = T_{a,t}^{Bot} + T_{a,t}^{Top} + T_{a,t}^{Municipal} + T_{a,t}^{Property} + T_{a,t}^{Stock} + T_{a,t}^{Business} + T_{a,t}^{Deceased}$$

- 처음 두개의 구성 요소는 소득을 하위 및 상위 그룹으로 나눈 소득과세 수입
- 다음 두 항목은 지방(시, 市) 소득세와 재산세
- 마지막 세 항목은 주식 자본 소득에 대한 세금, 법인세를 내지 않는 영세 사업자에 대한 세금, 사망연도에도 여전히 과세 대상 소득을 가질 수 있음에 따른 사망자에 대한 세금

- 최하위 계층의 소득세(bottom income taxation) 수입은 다음과 같이 산출

$$T_{a,t}^{Bot} = \tau_{a,t}^{Bot} [y_{a,t}^{Personal} + y_{a,t}^{NetCap^+} - y_{a,t}^{PA}]$$

- 최저세율 τ_t^{Bot} 는 개인소득 $y_{a,t}^{Personal}$ 을 기준으로 하며, 채권 및 예금에 따른 순이익 $y_{a,t}^{NetCap^+}$ 는 세금의 목적상 양수이며 일정 수준 이상을 조건으로 함
- 세금 부담을 줄이는 인적공제(a personal allowance)는 $y_{a,t}^{PA}$ 에 해당

- 최상위 계층의 소득세(top income taxation) 수입은 다음과 같이 산출

$$T_{a,t}^{Top} = \tau_{a,t}^{Top} \cdot [y_{a,t}^{Personal} + y_{a,t}^{NetCap^+}] \cdot \alpha_{a,t}$$

- 여기에서는 특정 임계값(기준치)을 초과하는 소득만이 세율로 과세함

- 지방세(municipal tax)는 다음과 같이 산출

$$T_{a,t}^{Municipal} = \tau_{a,t}^{Municipal} \cdot [y_{a,t}^{Taxable} - y_{a,t}^{PA}]$$

- 지방과세는 인적공제(personal allowance)를 뺀 과세소득을 기준으로 하며, 과세 대상 소득 및 개인소득은 아래에서 정의

22) AM Bidrag는 모든 고용인과 자영업자가 매월 급여의 8%에 해당하는 금액을 내야 하는 세금으로, 고용주는 ATP와 연금 기여금이 공제된 후 노동시장 기여금이 급여에서 자동으로 공제되도록 보장하며, 그 후 나머지 세금이 공제됨(DREAM, 2021, p. 131)

- 재산에 대한 과세는 개인 소유 주택 가치²³⁾ $H_{a-1,t-1}^{Private}$ 에 따르며, $\tau_t^{Property}$ 는 암묵적으로 계산된 세율임

$$T_{a,t}^{Property} = \tau_t^{Property} \cdot H_{a-1,t-1}^{Private}$$

- 금융자산에 대한 세금은 다음과 같음

$$T_{a,t}^{Stock} = \tau_t^{Stock} \cdot (r_{div,t}^{Foreign} \cdot S_{a-1,t-1}^{Foreign} + r_{div,t}^{Home} \cdot S_{a-1,t-1}^{Home} + C_{a,t}^{Gains})$$

- τ_t^{Stock} 은 암묵적 세율이며, 배당금과 실현자본이득 모두 주식 소득에 대한 과세 대상임²⁴⁾

- 실현자본이득은 실제 주식의 이동 평균으로 모델링됨

$$C_{a,t}^{Gains} = 0.95 \cdot C_{a-1,t-1}^{Gains} + 0.05 \cdot [r_{cgains,t}^{Foreign} \cdot S_{a-1,t-1}^{Foreign} + r_{cgains,t}^{Home} \cdot S_{a-1,t-1}^{Home}]$$

- 자본이득은 평균 실현 기간이 20년으로 점진적으로 과세됨
- $(S_{a-1,t-1}^{Foreign}, S_{a-1,t-1}^{Home})$ 는 가계 포트폴리오의 일부이며, $r_{cgains,t}^{Foreign}$ 는 외생적 요구수익률과 외생적 해외 배당률에 의해 주어짐
- $r_{cgains,t}^{Home}$ 는 기업의 가치와 외생적 배당률에 따라 달라지기 때문에 내생적임

- 영업세(business tax)는 암묵적 세율 $\tau_t^{Business}$ 로 세전 이익 EBT_t 를 따름

- 사업 소득은 임금 소득을 따른다고 가정하고 임금 소득에 따라 코호트에 분배
- $n_{a,t}^e$ 는 t 기간 코호트 a 의 고용(employment)을 나타냄²⁵⁾

$$T_t^{Business} = \sum_a T_{a,t}^{Business} N_{a,t} = \tau_t^{Business} \cdot EBT_t \cdot \sum_a \frac{n_{a,t}^e w_{a,t}}{n_{a,t}^e w_{a,t}} = \tau_t^{Business} \cdot EBT_t$$

- 사망자에 대한 과세는 주로 사망자의 자본소득에 대한 세금으로, 다음 기간까지 생존하지 않는 자들 $1 - s_{a,t}$ 의 주식 $T_{a,t}^{Stocks} / \tau_t^{Stocks}$ 과 기타자본소득 y^{NetCap^+} 에 대한 과세 기준을 따름

$$T_{a,t}^{Death} = \tau_t^{Death} \cdot (1 - s_{a,t}) \cdot \left(\frac{T_{a,t}^{Stocks}}{\tau_t^{Stocks}} + y_{a,t}^{NetCap^+} \right)$$

23) 원문은 “the value of the primo stock of privately owned housing”임
 24) 재평가(revaluation)란 실현되지 않는 자본이득(자산은 가격을 변경하지만 거래되지 않는 경우)이며, 자본이득은 자산이 거래될 때 발생함
 25) 노동시장에 대한 장(chapter)에서는 표기가 남용(abuse)되어 $n_{a,t}^e$ 은 거주자의 고용만을 나타내고 본 장에서와 같이 기간 t 에서 a 연령의 모든 근로자의 고용을 나타내지 않음

- 노동시장기여금(AM Bidrag)은 다음과 같이 모델링되며, 이는 공무원연금에 대한 연금기여금을 조정한 1인당 임금과 세율에 따라 달라짐²⁶⁾

- 직원당이 아닌(not per employee) 1인당(per person) 임금으로 명시

$$T_{a,t}^{AM} = \tau_t^{AM} \cdot \left[\frac{n_{a,t}^e w_{a,t}}{N_{a,t}} \right] \cdot \left[\frac{\sum_a n_{a,t}^e w_{a,t} - T_t^{CivilServants}}{\sum_a n_{a,t}^e w_{a,t}} \right]$$

- 직접세에는 자본연금 소득에 대한 세금으로 부과되는 기타(잔여) 개인소득세가 포함되며, 마지막 항은 개인소득에 암묵적 세율을 곱하여 산출

$$T_{a,t}^{OPers} = T_{a,t}^{CapPension} + y_{a,t}^{Personal} \cdot \tau_t^{PRNCP}$$

- 자본연금 소득에 대한 세금은 다음과 같음

$$T_{a,t}^{CapPension} = \tau_t^{CapPension} \cdot f_t^{\tau CapPension} \cdot y_{a,t}^{CapPension}$$

- 차량증량부담금 $T_{a,t}^{Weight}$ 는 비주택(-H)소비(non-housing consumption)에 따른 연령별 개인 소유 자동차의 재고량과 암묵적 세율을 곱하여 인당 계산됨²⁷⁾

$$T_{a,t}^{Weight} = \tau_t^{Weight} Cars_{t-1} \frac{C_{a,t}^{-H}}{C_t^{-H}} = \tau_t^{Weight} Cars_{t-1} \frac{N_{a,t} C_{a,t}^{-H}}{\sum_j N_{j,t} C_{j,t}^{-H}} \frac{1}{N_{a,t}}$$

- 법인에 대한 과세는 민간 부문에서 법인세 수입 T_t^{Main} 과 북해의 석유 및 가스 채굴에 대한 세금 $T_t^{NorthSea}$ 을 더하여 산출

$$T_t^{Corp} = \sum_{sp} T_{sp,t}^{Main} + T_{ext,t}^{NorthSea}$$

- 법인세는 세전 소득 EBT_t 에 부과

$$T_t^{Main} = \tau_t^{Corp} \cdot \sum_{j \in sp - ext} EBT_{j,t}$$

26) 마지막 항은 연령별 임금을 공무원 기여금 이후(after civil servants contribution)로 수정하는 것이며, 해당 기여는 연령에 따라 달라지지 않기 때문에 추가 항(extra term)으로 모델링됨

27) 모형을 보다 일관성 있게 만들기 위해 연령별 자동차 재고를 설정함에 따라 연령별 증량세 분포는 연령별 이전 자동차 소비량(prior car consumption)과 일치할 수 있음. 그러나 본고에서 자동차 소비를 연령별로 나누지 않기 때문에 전체 소비량에 비례한다고 가정하고, 연령별로 추가 장부를 하지 않고 비주택 소비에 따라 세금을 분배함

- 석유 및 가스 채굴에 대한 세수는 다음과 같음

$$T_{ext,t}^{Corp} = T_{ext,t}^{NorthSea} = \tau_t^{CorpNorth} \cdot EBITDA_{ext,t}$$

- 채굴 부문 과세에는 암묵적 세율 $\tau_t^{CorpNorth}$ 을 적용하며 해당 부문의 세금, 이자 및 감가상각 적용 전의 소득 $EBTDA_{ext,t}$ 를 기준으로 함

○ 연기금(Pension funds)은 채권 이자, 배당금, 주식에 대한 자본이득과 같은 금융자산 수익에 대한 세금을 납부

$$T_t^{PAL} = \tau_t^{PAL} \cdot r_t^{return} \cdot A_{t-1}^{PFunds}$$

○ 대중매체 분담금은 성인 1인당 지불하는 고정액 τ_t^{Media} 에 성인의 수를 곱하여 산출

$$T_t^{Media} = \tau_t^{Media} \sum_{a \geq 18} N_{a,t}$$

2) 소득항과 공제액(Income terms and allowances)

□ 개인소득(Personal income)은 다음과 같이 산출

○ 노동시장기여금을 제외한 1인당 임금소득 $T_{a,t}^{AM}$ 에 정부 지출에 따라 아래에 정의된 과세소득 이전(taxable income transfers) $TR_{a,t}^{Taxable}$ 을 더하고

○ 두 가지 다른 유형의 연금제도에 대한 세금 공제 연금 지급액 $PP_{a,t}^X$ 와 $PP_{a,t}^{Cap}$ 을 뺀 다음

○ 과세 연금(수령) 소득 $y_{a,t}^{PX}$ 을 더하여 산출²⁸⁾

$$y_{a,t}^{Personal} = \left(w_{a,t} \frac{n_{a,t}^e}{N_{a,t}} - T_{a,t}^{AM} + TR_{a,t}^{Taxable} - PP_{a,t}^X - PP_{a,t}^{Cap} + y_{a,t}^{PX} \right) \cdot J_{a,t}^{Personal}$$

- 조정계수 $J_{a,t}^{Personal}$ 은 개인소득이 귀속 데이터와 일치함을 보장함

○ 과세 대상 소득(Taxable income)은 순 자본소득을 더하고 여러 가지 공제(AL)를 제외한 값

$$y_{a,t}^{Tax} = \left(y_{a,t}^{Personal} + y_{a,t}^{NetCapital} - AL_{a,t}^{ETC} - AL_{a,t}^{Unemp} - AL_{a,t}^{EarlyRet} - AL_{a,t}^{Other} \right) \cdot J_{a,t}^{Tax}$$

28) 자본연금(capital pensions) 소득은 개인소득으로 과세하지 않고 독립 세율이 적용됨. 자본연금에 대한 지급은 세금 공제가 가능함

- 특정 코호트 내 일반인의 순 자본소득은 다음과 같음

$$y_{a,t}^{Net\ Capital} = y_{a,t}^{Cap^+} - y_{a,t}^{Cap^-}$$

- 양(+)²⁹⁾의 자본소득은 가계의 명목예금 $r^{dep} \cdot v_{a,t}^{HHdep}$ 과 채권 $r^{bonds} \cdot v_{a,t}^{HHbonds}$ 의 수익이며
- 음(-)의 자본소득은 명목 은행 부채(nominal bank debt) $r^{dep} \cdot v_{a,t}^{HHBankDebt}$ 와 주택담보대출(mortgage debt) $r^{mort} \cdot v_{a,t}^{HHMort}$ 에 대한 이자 지급으로 구성
- 모든 자본소득은 과세소득의 일부이므로 지방과세를 위한 과세표준으로 들어감
 - 다만 특정 임계값 이상($y_{a,t}^{Net\ Capital} > \underline{y} > 0$)인 양(+)²⁹⁾의 순 자본소득만 하위 및 상위 과세표준에 대한 과세 기준의 일부로 들어감
 - 정확한 측정을 위해 마이크로 데이터를 검토 중이며, 현재는 지방세 과세 기준에 아래의 항을 포함

$$y_{a,t}^{Net\ Cap^+} = (y_{a,t}^{Net\ Capital} > \underline{y} > 0) \equiv y_{a,t}^{Cap^+} \cdot 0.5$$

- 잠재적 인적공제는 모든 사람(성인)에게 동일하며 이전(transfers)에 대한 비율 조정(satsregulering, s^{reg})을 적용
 - 그러나 실제 평균적인 인적공제의 경우 일부(소수)의 사람은 소득이 없기 때문에 모든 코호트에 대해 동일하지는 않음²⁹⁾

$$AL_{a,t}^{Pers} = AL_{a,t-1}^{Pers} \cdot s_t^{reg} + J_{a,t}^{ALPers}$$

- 근로소득공제(Beskæftigelsesfradrag, *EITC*)는 고용된 사람들을 위한 공제로 소득 증가 대비 비율로 계산
 - 저소득자에게는 음(-)의 한계세(negative marginal tax)가, 고소득자에게는 음(-)의 일괄세(negative lump sum tax)가 부과되는 특성이 있음
 - 본 모형에서 이 공제는 모든 연령에 대해 동일한 것으로 가정하며, 이에 따라 총 세액공제는 평균공제율에 임금을 곱하여 계산

$$AL_t^{EITC} = \tau_t^{EITC} \cdot w_t$$

29) 인적공제는 소득이 없고 기혼인 경우 배우자에게 적용될 수 있지만 이 효과는 모형에 포착되지 않음

- 총 세액공제는 임금에 따라 인구 연령대별로 나뉨

$$AL_{a,t}^{EITC} = \left[\frac{w_{a,t} \cdot n_{a,t}^e}{\sum_a w_{a,t} n_{a,t}^e} \right] \cdot \frac{AL_t^{EITC}}{n_{a,t}}$$

- 고용보험 기여금 공제 $AL_{a,t}^{Unemp}$ 및 조기퇴직 기여금 공제 $AL_{a,t}^{EarlyRet}$ 는 개인 분담금에 따름

$$AL_{a,t}^{Unemp} = A2C_t^{Unemp} \cdot Cont_{a,t}^{Unemp}$$

$$AL_{a,t}^{EarlyRet} = A2C_t^{EarlyRet} \cdot Cont_{a,t}^{EarlyRet}$$

- 기타 공제에는 교통비, 의류비 공제 등이 포함되며 대개 고용과 관련이 있으므로 이를 따르도록 모델링

$$AL_t^{Other} = ALR_t^{Other} \cdot n_t^e$$

3) 간접세

- 간접세는 부가가치세, 소비세, 자동차판매세(등록세, registreringsafgifter)와 생산세로 구성

- 부가가치세와 다른 관세는 다른 장에서 설명함
- 간접세에는 관세(수입품에 대한 세금)와 EU에 대한 간접세 간 차액도 포함

$$T_t^{Indirect} = T_t^{VAT} + T_t^{EDuty} + T_t^{Production} + T_t^{Cus} - T_t^{EU}$$

- EU에 대한 간접세는 관세와 정확히 동일하지 않으므로 보정계수가 추가됨³⁰⁾

$$T_t^{EU} = f_t^{TCus} \cdot T_t^{Cus}$$

- 대부분의 간접세는 taxes.gms 파일에 코딩되어 있으며 투입-산출 체계를 다루는 장에서 설명함
- *Production* 세금은 자동차 중량부담금, 급여세, 근로자 교육에 대한 기업의 기여도 관련 세금 및 기타 생산세 소액으로 구성
 - 처음 세 가지 세금은 업종(부문)에 따라 다름

30) 거의 정확하게 $T_t^{Cus} = T_t^{EU}$ 임

- 각 세수는 업종별 세율에 건물 자본 가치, 기계 자본 가치 및 직원의 임금 합계를 곱하여 모델링됨
- 생산세에는 토지와 관련된 재산세도 포함되며 업종별로 다름³¹⁾

4) 기타 정부 수입(Other government revenues)

□ 기타 수입 모델링은 완료되지 않은 상태이며 현재는 다음과 같이 산출

$$\begin{aligned}
 T_t^{Other} &= T_t^{Bequest} + T_t^{Church} + T_t^{\delta} + Cont_t \\
 &\quad + Rev_t^{Foreign} + Rev_t^{HHFirms} + \Pi_t^G \\
 &\quad + G_t^{LRent} + J_t^{GovRev}
 \end{aligned}$$

- 유증세(Bequest taxes, 자본세와 상속세)는 유증액 $T_t^{Bequest} = \tau_t^{Bequest}$ 에 따름
- Beq_t 는 가구 부문에 설명된 유산의 합계이며 $\tau_t^{Bequest}$ 는 암묵적 세율
- 교회세 세수는 지방세와 동일한 과세표준을 따르며 개인 수준(at a personal level)에서 아래와 같이 산출
 - 교회 세금이 의무 사항이 아니므로 모든 사람들이 납부하는 것은 아니라는 사실을 포착하여 본문에 보정계수 $f_t^{\tau Church}$ 를 명시적으로 배치

$$T_{a,t}^{Church} = \tau_t^{Church} \cdot f_t^{\tau Church} \cdot [y_{a,t}^{Taxable} - y_{a,t}^{PA}]$$

- 정부 자본의 감가상각에 따른 수입 T_t^{δ} 은 정부 생산에 관한 장에서 논의
 - 해당 수입은 본 장에서 세입에 포함하지만 지출 측면에서는 정부 소비의 일부이며, 공공 생산 측면에서는 감가상각은 비용으로 계산됨
- 사회 프로그램 출연금(Bidrag til social ordninger, 사회제도기여금) $Cont_t$ 는 국가에 대한 다양한 특정 지불 목록을 합산하여 산출

$$\begin{aligned}
 Cont_t &= Cont_t^{Unemp} + Cont_t^{EarlyRet} + Cont_t^{FreeRest} \\
 &\quad + Cont_t^{Mandatory} + Cont_t^{CivilServants}
 \end{aligned}$$

31) 국민계정에서 토지세는 기업과 가계 모두에 의해 지불되며, MAKRO 모형에서 기업은 토지를 소유하고 있지 않기 때문에 수익은 건물과 주택의 자본금에 기초함

- 모든 기여금은 기여율 μ_t^X (32)와 고용 형태에 따른 영향을 받음(33)

$$Cont_t^X = \mu_t^X \cdot n_t^{LabForce}$$

· 집합 X 에는 조기 퇴직 기여금, 기타 자발적 기여금(기타 자발적 기부), 의무적 기여금 및 공무원 연금 기여금이 포함

○ 토지 임대료 G_t^{LRent} 는 채굴 부문의 총 부가가치에 따라 달라지며, 다음과 같이 계산

$$G_t^{LRent} = \tau_t^{Rent} \cdot GVA_{ext,t}$$

○ 마지막으로 J_t^{GovRev} 는 $REV_t = T_t$ 가 실제 데이터와 일치하도록 보장하는 변수

- J_t^{GovRev} 는 0 부근에서 변동하는 매우 작은 양으로 전망에서 0으로 설정됨

〈표 II-11〉 서울의 부호 표기(Government Revenues: Tax Rates)

Direct Taxes		
Text	Code	Factor Value
$\tau_{a,t}^{Bot}$	$= t_t^{Bot} \times f_{a,t}^{Bot}$	$f_{a,t}^{Bot} \neq 1$
τ_t^{Top}	$= t_t^{Top}$	
$\tau_{a,t}^{Municipal}$	$= t_t^{Municipal} \times f_{a,t}^{Municipal}$	$f_{a,t}^{Municipal} \neq 1$
$\tau_t^{Property}$	$= t_t^{Property}$	
τ_t^{Stocks}	$= t_t^{Stocks}$	
$\tau_t^{Business}$	$= t_t^{Business}$	
τ_t^{Death}	$= t_t^{Death}$	
τ_t^{AM}	$= t_t^{AM} \times f_t^{AM}$	$f_t^{AM} \neq 1$
$\tau_{a,t}^{PAL}$	$= t_t^{PAL} \times f_{a,t}^{PAL}$	$f_{a,t}^{PAL} \neq 1$
$\tau_t^{Bequest}$	$= t_t^{Bequest}$	
τ_t^{rent}	$= t_t^{Rent}$	
τ_t^{Church}	$= t_t^{Church} \times f_t^{Church}$	$f_t^{Church} \neq 1$
τ_t^{Weight}	$= t_t^{weight}$	
$\tau_t^{CapPension}$	$= t_t^{CapPension} \times f_t^{CapPension}$	$f_t^{CapPension} \neq 1$
τ_t^{Corp}	$= t_t^{Corp} \times f_t^{Corp}$	$f_t^{Corp} \neq 1$
τ_t^{Media}	$= t_t^{Media}$	

출처: DREAM(2021), p. 137.

32) 이 비율은 공공 지출에 설명된 대로 공공 이전의 규제 비율(요금 규제 비율)을 따름

33) MAKRO에서 노동력(고용의 정도)은 외생적 인구의 내생적 고용의 함수로 외생적으로(기계적으로) 계산됨

나. 지출

□ (구성) 정부 지출은 소비, 투자, 이전, 보조금 및 기타 비용의 합

$$G_t^{EXP} = G_t^{Cons} + G_t^{Inv} + G_t^{Trans} + G^{Subs} + Other_t$$

- 정부 투자 및 자본금에 대한 자세한 내용은 공공 생산에 관한 장에서 설명함
- 공공 부문에 적용되는 특정 회계기준으로 인해 정부 소비는 두 개의 개별 대상으로 구성
 - 하나는 자본 감가상각(capital depreciation)에 따른 부분이며, 다른 하나는 인구 변화(F_t^N 인구지표를 사용)와 임금에 따른 부분임

$$P_t^{GCxD} G_t^{CxD} = \mu_t^{GCxD} F_t^N W_t$$

1) 이전(Transfers)

□ 정부 소득 이전(Government income transfers)은 여러 항목의 합계이며 집합 Γ 에 33 개의 항목 j 가 존재함

$$TR_t = \sum_{j \in \Gamma} TR_{j,t}$$

- 모든 소득 이전 j 는 100만kr(덴마크 크로네)을 기준으로, 100만kr을 곱한 1인당 비율로 결정됨³⁴⁾

$$TR_{j \in \Gamma, t} = Rate_{j \in \Gamma, t} Base_{j \in \Gamma, t} + J_{j \in \Gamma, t}^{TR}$$

- 요율(Rates)은 비율조정요율(sats-regulering, SREG)을 따름

$$Rate_{j \in \Gamma, t} = Rate_{j \in \Gamma, t-1} SREG_t + J_{j \in \Gamma, t}^{Rate}$$

· 비율조정요율은 2년의 시차가 있는 근로자 1인당 평균 임금을 기반으로 함

$$SREG_t = \frac{\frac{1}{n_{t-2}^e} \sum_a (w_{a,t-2} \cdot n_{a,t-2}^e)}{\frac{1}{n_{t-3}^e} \sum_a (w_{a,t-3} \cdot n_{a,t-3}^e)} + J_t^{SReg}$$

34) 베이스가 0임에도 불구하고 몇 년 동안 이전(transfers)이 발생하였으므로 모형을 계측하기 위해 조정 항(an adjustment term)을 포함해야 함. 이것은 아마도 전년도에 지급된 전임금이 수정되었기 때문 일 것. 그러나 숫자는 매우 작으며 전망에서 이 조정항은 0으로 설정되고 사용되지 않음

- 베이스는 인구 전망(Befolkningsregnskabet)에 포함된 사회경제적 집단에서 이전 집단으로의 매핑 S2T임³⁵⁾

$$Base_{j \in \Gamma, t} = Base_{j \in \Gamma} = \sum_{soc \in Socio} S2T_{j \in \Gamma, soc} N_{soc}$$

- 매핑 S2T는 매트릭스에 포함되어 있으며 대부분 하나의 사회경제 집단은 한 가지 유형의 이전을 받음
- 다양한 사회경제 집단에 속한 인원수는 고용 여부에 따라 변함
- 천 명이 고용되면 고용을 구성하는 집단은 천 명 증가하며, 비고용 집단은 똑같이 천 명 감소함
 - 특정 할당은 구조적 고용³⁶⁾의 편차에 따름

$$n_{soc, t} = \tilde{n}_{soc, t} + \lambda_{soc, t}^{dS2dE} (n_t^E - \tilde{n}_t^E) + J_{soc, t}^{n_{soc}}$$

- n_t^E 는 외국인 노동자를 제외한 총 고용자수이며 \tilde{n}_t^E 는 이에 상응하는 구조적 고용을 나타냄
 - $\lambda_{soc, t}^{dS2dE}$ 는 다양한 인구집단 구성에 대한 구조적 수준과 비교하여 고용의 변동에 따른 한계 효과를 나타냄
 - $\tilde{n}_{soc, t}$ 는 사회경제적 집단 soc 의 구조적 인원수
 - $J_{soc, t}^{n_{soc}}$ 는 계수조정항이며, 조정항은 0으로 설정되지만 과거 데이터에서는 0이 아닐 수 있음
- 고용의 변화는 인구를 사회경제적 집단으로 분배하는 것뿐만 아니라 정부 소득 이전을 받는 다양한 집단의 규모에도 영향을 미침³⁷⁾
- 다양한 사회경제적 집단과 이전 집단은 모델에서 연령에 따라 달라지지 않음
 - 특정 연령의 1인당 정부 소득 이전은 여러 항(terms)으로 구성됨
 - 고용 관련 이전(고용 효과 EEFF)
 - 아동 관련 이전
 - 고용에 영향을 받지 않는 이전(기타 효과 OEFF)³⁸⁾

35) S2T는 $Socio2Transfer_{j, soc}$ 를 나타내며 여기서 $j \in \Gamma$, $soc \in Socio$ 임

36) 구조적 고용은 균제상태의 고용으로 간주되며 관련된 자세한 내용은 II.8.가.를 참고

37) 그 효과는 '인구 계정의 세분화 조정' 보고서에 보고된 재무부의 추정치에 기반을 둠

38) 첫 번째 비율은 고용이 연령에 따라 다른 사회경제적 집단에 분포되어 있기 때문에 고용당이 아니고

$$TR_{a,t} = Rate_t^{EEFF} \frac{n_{a,t}^e}{N_{a,t}} + TR_{a,t}^{Children} + Rate_{a,t}^{OEFF}$$

- 고용에 의해 달라지는 고용인 1인당 이전의 변화는 이전 베이스에 미치는 영향에 따라 산정

$$Rate_t^{EEFF} = \sum_{j \in \Gamma} \left(Rate_j \sum_{soc \in Socio} S2T_{j,soc} \lambda_{soc,t}^{dS2dE} \right)$$

- 고용 효과에 관한 비율은 고용 이동이 연령과 상관없이 사회경제적 집단에 동일한 영향을 미친다고 가정하기 때문에 연령에 의존하지 않음³⁹⁾
- 기타 효과에 대한 비율(OEFF)은 다음과 같이 산출

$$Rate_a^{OEFF} = F^{OEFF} \cdot F_a^{OEFF} \cdot \left(\sum_{j \in \Gamma} Rate_j \sum_{soc \in Socio} S2T_{j,soc} P2S_{soc} + J_j^{Rate} \right)$$

- 모든 연령층이 사회 경제적 집단에 걸쳐 동일하게 할당되지 않는다는 세부 사항을 포착하기 위해 연령 분포를 사용함
 - 괄호 안은 모든 연령층의 1인당 평균 이전 금액
- 모든 정부 소득 이전에 소득세가 적용되는 것은 아님
- 비과세 이전 집합은 $(\Gamma - \tau)$ 로 표시된 Γ 의 하위 집합
 - 특정 그룹의 모든 수령인이 연령과 무관하게 동일한 금액을 받는다는 가정하에 BFR의 연령 분포 사회경제적 집단을 사용하여 다음과 같이 비과세 이전이 연령 그룹에 분배되는 방식을 계산함

$$TR_{j \in (\Gamma - \tau), a} = \frac{Rate_{j,a} TR_j}{N_a}$$

2) 보조금(Subsidies)

- 정부 보조금은 제품 및 생산 보조금에서 EU가 지원하는 보조금을 차감한 것

$$S_t^{Sub} = S_t^{Product} + S_t^{Production} - S_t^{EU}$$

(not per employed) 연령대에 걸쳐 동일하다고 가정되는 한계 효과임. 따라서 첫 번째 항은 취업자 1인당 실제 이동이 아니라 실제 고용에서 평가되는 한계 이동임. 평균 요율과 한계 요율의 차이는 두 번째 항에서 포착되며 고용 변화의 영향을 받지 않는 것으로 가정
39) 이 가정은 보다 상세한 작업이 이루어지면 다음 모델 버전에서 완화될 수 있음

- 생산 보조금은 주로 투입 비용, 특히 임금과 관련이 있으며 노동/임금 관련 보조금을 제외한 생산 보조금은 총 부가가치의 일정 비율로 모델링됨
- 제품 보조금은 순 관세율의 일부로 네거티브 관세(negative duties)임
- EU에 의해 조달된 보조금은 GDP 대비 외생적 비율로 모델링됨
- 토지 및 라이선스 구입에 대한 지출, 외국과 가계 및 국내 기업에 대한 지출은 모두 GDP 대비 비중으로 모델링됨

다. 순 이자소득

- (구성) 순 이자소득은 정부 자산의 이자소득에서 정부 부채에 대한 지급이자를 뺀 값으로 구성

$$Netr_t^y = \sum_{i \in \mathcal{A}} A_{i,t-1} \cdot r_{i,t} - \sum_{j \in \mathcal{L}} L_{j,t-1} \cdot r_{j,t}$$

- \mathcal{A} 는 정부가 소유한 자산의 집합이며, \mathcal{L} 은 정부 부채의 집합
- 정부 자산은 채권, 예금 및 (거의 전적으로 국내)자본으로 구성되는 반면 정부 부채는 부동산 채권과 기타 채권으로만 구분되어 구성
 - 전망에서 수익은 평균 이자율과 총 명목자산 및 부채 측면에서 작성
 - 자산의 경우 A와 F라는 두 개의 별도 계정으로 유지되며 아래에서 논의

$$Netr_t^y = (A_{t-1}^{\mathcal{G}} + F_{t-1}^{\mathcal{G}})r_t^{\mathcal{A}} - L_{t-1}^{\mathcal{G}}r_t^{\mathcal{L}}$$

$$r_t^{\mathcal{A}} = \sum_{i \in \mathcal{A}} \omega_{i,t-1}^{\mathcal{G}} \cdot r_{i,t} + J_t^{\mathcal{A}}$$

$$r_t^{\mathcal{L}} = \sum_{j \in \mathcal{L}} \omega_{j,t-1}^{\mathcal{G}} \cdot r_{j,t} + J_t^{\mathcal{L}}$$

with

$$\omega_{i,t-1}^{\mathcal{G}} = \frac{A_{i \in \mathcal{A}, t-1}}{A_{t-1}^{\mathcal{G}} + F_{t-1}^{\mathcal{G}} \equiv \sum_{i \in \mathcal{A}} A_{i,t-1}}$$

$$\omega_{j,t-1}^{\mathcal{G}} = \frac{L_{j \in \mathcal{L}, t-1}}{L_{t-1}^{\mathcal{G}} \equiv \sum_{j \in \mathcal{L}} L_{j,t-1}}$$

- 조정항은 관측된 과거 수익률과 일치하도록 보장하는 역할
 - 특정 회사의 주식처럼 모든 개별 자산이 동일한 수익을 내는 것은 아니므로 공공 및 민간 포트폴리오의 서로 다른 미시적 구성은 데이터에서 관찰된 수익이 서로 다르다는 것을 의미
 - 모형에서 자본은 동질 자산으로 처리되므로 전망에서 이를 보유하는 모든 경제 주체에게 동일한 수익이 생성돼야 하며 이는 j-항을 0으로 설정하는 것을 의미함⁴⁰⁾
- 정부 자산 가치(value of government assets)는 GDP의 일정 부분을 $A_t^G = A_2 Y_t \cdot GDP_t$ 로 가정하며, GDP 대비 재정수지가 변하면 GDP 대비 총 부채 비율도 변화
- 국채(government bonds) 금리는 재정 지속가능성 지표 산출 시 정부가 할인율로 사용하는 금리
 - 정부 부채(Government liabilities)는 정부 자산/assets)과 정부 순자산(net wealth)이 결정된 후의 나머지(residual object)임

$$A_t^G - NETW_t = L_t^G$$

- 정부 순자산(Government net wealth)은 정부 펀드(government funds) F_t^G 를 제외한 순 금융자산으로 산정

$$NETW_t^G = A_t^G - L_t^G = NFA_t^G - F_t^G$$

- 정부 펀드는 외생적이며 민간에 지출될 수 있는 공공 저축이고, 지출될 때까지 공공 부문에서 (재정적으로) 관리됨
- 정부 펀드는 회계 관점에서 정부가 보유할 수 있는 다른 자산 포트폴리오와 구별이 안 됨

- 순 금융자산은 정부 예산 및 재평가(revaluations)에 따라 변동⁴¹⁾

$$NFA_t^G = NFA_{t-1}^G + Budget_t + REV_t^G$$

- 재평가는 배당금 또는 이자지급과 동일한 방식으로 모델링

$$REV_t^G = \sum_{i \in A} A_{i,t-1} \cdot r_{j,t}^{gain} - \sum_{j \in L} L_{j,t-1} \cdot r_{j,t}^{gain} + J_t^{Grev}$$

40) 정부가 주택담보대출이나 주식을 발행하지 않고 채권 형태의 부채만 가지고 있다고 가정함

41) 자산의 가치를 측정할 때 자산의 거래 여부는 중요하지 않음. 따라서 재평가는 자본이득과 동일하고, 그 구분은 세금 목적에만 해당함

- 자기 자본에 대한 재평가/자본이익률은 모형에서 내생적인 기업 가치의 변화율이며, 다른 모든 재평가율은 외생적임

- 부채는 채권(bonds)과 주택담보대출(mortgages)로 균등하게 나뉨

$$MORG_t^G = \omega_{morg,t}^G \left[\sum_{j \in \mathcal{L}} L_{j,t} \right] = \omega_{morg,t}^G L_t^G$$

- 비모기지채권(Non-mortgage Bonds)은 자산과 부채의 순액으로 계산

$$Bonds_t^G = \omega_{Bonds,t}^G \cdot (A_t^G + Funds_t^G) - \underbrace{(1 - \omega_{morg,t}^G) \cdot L_t^G}_{\text{Government-issued Non-mortgage Bonds}}$$

라. 구조적 객체(Structural objects)

- (구성) 정부 구조 예산은 경기순환 효과 및 기타 일시적 효과를 보정한 실제 예산(actual budget)으로 주어짐

$$SBdg_t = Bdg_t - BCEff_t - OTEff_t$$

- 경기변동 효과는 예산 탄력성, 산출 격차, 고용 격차를 기반으로 산출⁴²⁾

$$BCEff_t = \eta_t^{Budget} \cdot \left(0.6 \cdot \left(\frac{n_t^e}{\tilde{n}_t} - 1 \right) + 0.4 \cdot \left(\frac{y_t}{\tilde{y}_t} - 1 \right) \right) \cdot GVA_t$$

- 기타 일시적인 효과는 세수 격차(연금반환세, 채굴세, 기업과세, 자동차 등록세), 순이자 차이, 기타 특수직 격차(gaps in other special posts) 및 임시 조정으로 구성되며 외생적으로 취급됨
- HBI(holdbarhedsindikator) 모형에서 재정 지속가능성 지표는 모든 미래 정부 수입에서 지출을 뺀 순 현재가치(재정수지, primary budget)에서 GDP의 순 현재가치 대비 초기 정부 순 부채(또는 순자산 포함)를 뺀 값과 같음

$$HBI_t = \frac{(1+r_t) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^i \frac{1}{1+r_{t+j}} \right) PrBdg_{t+i} + NETW_t^G}{(1+r_t) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^i \frac{1}{1+r_{t+j}} \right) GDP_{t+i}}$$

42) 구조 예산 수치 산출에 대한 자세한 내용은 재무부의 웹 페이지에서 제공되는 'Finansministeriets metode til beregning af strukturel saldo'을 참고

- 여기서 국제 금리를 사용하여 GDP와 재정수지를 모두 할인하며, 재정수지와 GDP는 2099년 이후로 일정하다고 가정

7. 공공 생산(Public Production)

- 경제에서 소비되는 공공 생산물은 교육, 의료, 사법 제도, 국방, 보육, 노인 돌봄 등에 이르기까지 국가가 제공하는 모든 다양한 재화와 서비스로 구성됨
 - 공공 생산물 Y_t^G 는 수출되지 않으며 전적으로 국내에서 소비됨
 - 공공 서비스의 대부분은 조세 수입 또는 공공 부채의 수입으로 지불됨
 - 보건의료 및 교육에 대한 일부 공동 부담금은 민간 경제 주체가 직접 지불
 - 이러한 개인 지불(private payments)은 가계의 공공재 및 서비스 소비 C^{PU} 로 나타나며, 나머지는 공공재 및 서비스의 정부 소비 G^{PU} 또는 공공 생산의 정부 투자 I^{PU} 로 처리
 - 이것은 공공 생산의 수요 측면이며 $Y_t^G = C^{PU} + (G^{PU} + I^{PU})$ 와 같음
- 공공재에 대한 총수요는 공공재의 총생산과 같으며, 공급 측면 관점에서 공공재에 대한 수요는 외생적이거나 주어진 것으로 간주
 - 사실 모형에서 공공 소비는 부분적으로 외생적인데, 인구의 외생적 변화에 따라 영향을 크게 받기 때문

가. 공급 측면

- (구성) 전체 공공 부문에는 하나의 ‘공급함수(supply function)’가 있음⁴³⁾
 - Y^G 는 노동, 자본 장비 및 구조, 중간재를 사용한다는 점에서 민간 부문 재화(private sector goods)처럼 생산되지만 다음 세 가지 측면에서 민간 부문 생산과 다름
 - ① 데이터에서 공공 생산은 생산요소 기준(input method)으로 측정됨
 - 이는 생산물의 가치가 정확히 생산에 투입되는 생산요소 가치의 합이라는 것을 의미

⁴³⁾ 공공재는 생산함수가 없기 때문에 공급함수(supply function)라는 용어는 주의해서 사용해야 함

- ② 공공 부문 회계 기준에 따라 공공자본 비용은 전액 감가상각비로 계상되며, 자본 축적에 대한 투자는 자본 비용으로 직접 고려하지 않음
 - 이러한 회계 규칙은 공공 생산에 대한 대안적 모델링이 필요하다는 것을 의미
 - ③ 생산함수가 없음
- 생산요소 기준(input method)은 영 이윤 조건(zero profit condition)과 같음
- 각 생산요소 X_t^j 의 명목 비용을 측정할 수 있다면 다음을 구할 수 있음

$$P_t^0 Y_t^G = \sum_j P_t^j X_t^j$$

- 각 생산요소의 가격과 수량에 대한 별도의 측정값이 있고 투자, 자본, 고용 및 사용된 중간재의 양도 측정할 수 있음
 - 남은 쟁점은 어떻게 공공 생산물 Y^G 의 양과 해당 가격 P^0 을 분리해서 측정할 것인가이며, 민간 부문 모형에서 생산이론을 사용하여 이 문제를 해결함
 - 이는 생산요소와 생산물의 관계를 설명하는 CES 생산함수로 구체화됨
 - 생산물 가격은 생산이론과 이윤 극대화의 부산물로 공공 부문에서 파생된 것과 동일한 최적화 가격 P^0 임⁴⁴⁾
- 공공 부문에서는 데이터를 따르는데 생산물 가격으로는 물가지수를 사용하며, 영 이윤 조건이 주어지면 생산량은 잔차 변수로 결정될 수 있음
- 민간 부문 모형에서와 같이 생산요소에 대한 최적의 선택은 없으며, 정부가 이 거대한 생산 '회사'를 '관리'하는 것으로 본다면 정부가 제시한 생산요소 필요량으로 대체됨
 - 생산물 변동에 관한 가정 중 하나는 자본스톡이 공공 부문과 민간 부문 생산물의 변동을 따른다는 것이며 이러한 가정은 모수 $\hat{\alpha}_t^K$ 를 추가하여 명시

1) 생산의 핵심 요소(Fundamentals)

- (생산요소 가격: 원료 및 노동) 공공 부문 원료 가격 p_t^R 은 민간 부문에서와 동일하게 결정됨
 - 공공 부문의 노동에 대해 측정된 지출은 지급된 임금 $\hat{w}_t n_t$ 으로 구성되며, 급여세 τ_t^L 는 국가에서 다시 국가로 이전되기 때문에 여기에서 무시함

44) 기업의 문제에 대한 장과 가격 책정에 대한 장에서 자세히 설명

- 임금지출에서 구인 비용은 공공 부문 회계처리의 입력 방식에서 고려되지 않는 사용자 인건비의 구성 요소이기 때문에 무시함
- 그러면 공공 부문의 근로자 1인당 임금은 다음과 같음

$$\hat{w}_t = w_t \bar{h}_t \bar{\rho}_t \rho_t^g$$

- 여기서 \bar{h}_t 와 $\bar{\rho}_t$ 는 공공 부문을 포함한 모든 기업에 동일하게 적용되는 평균 임금과 평균 노동생산성을 나타냄
- ρ_t^g 는 부문 간 서로 다른 평균 임금을 보정하는 모수에 해당
- 단위임금 w 는 평균 계약임금으로 시차적 계약 교섭에 따른 임금 경직성을 반영한 것
- 본 장에서 노동 변수는 $L = h\rho n$ 이며, $\hat{w}_t n_t = P_t^L L_t$ 로도 표기할 수 있음

- (자본감가상각률) 공공자본(기계와 건물)은 각각 표준 운동법칙(the law of motion)에 따라 해마다 소모됨

$$K_t = (1 - \delta_t^G) K_{t-1} + I_t$$

- 데이터가 존재하는 해에는 관찰된 투자 및 자본금 정보를 사용하고 운동법칙을 적용하여 감가상각률 δ_t^G 을 구함
 - 감가상각률은 자본의 사용자비용과 공공자본의 핵심 변수이므로 중요함
- 그런 다음 감가상각률에 대해 과거 데이터가 생성되면 ARIMA 프로세스를 사용하여 δ_t^G 의 변화값을 전망
- 운동법칙의 메커니즘은 가용 데이터가 있는 기간을 넘어 정부가 계획한 투자 지출을 모형에 제공하는 계획된 시계(2025년)로 확장되며, 감가상각률 예측과 함께 '계획 기간'의 자본스톡에 대한 시계열을 산출함

- (투입 가격: 자본) 국제 회계 기준에 따라 국민계정에서 감가상각액만 공공자본 비용으로 사용됨

- 우리는 공공자본 비용(cost of public capital)을 자본스톡 $P_t^K K_{t-1}$ 에 비례한다고 명시함
 - 여기서 P_t^K 는 해당 자본 유형의 투자 가격 P_t^I 에 위의 δ_t^G 에서 계산한 감가상각률을 곱한 값

- 관측 기간의 데이터를 정확히 일치시키기 위해 추가 보정항 λ 를 사용하여 유형별 자본에 따른 새로운 가격 변수 $P_t^{I\lambda}$ 와 새로운 수량 변수 K_t^λ 를 표기

$$P_t^K K_{t-1} \equiv P_t^{I\lambda} K_t^\lambda = \underbrace{\lambda_t^p P_t^I}_{P_t^{I\lambda}} \underbrace{\lambda_t^q \delta_t^G K_{t-1}}_{K_t^\lambda}$$

- $P_t^{I\lambda}$ 와 K_t^λ 에 대한 데이터 측정값이 있고, 자본 K_{t-1} 과 투자 I_t 에 대한 데이터를 고려하여 감가상각률을 복구하기 위해 운동법칙을 이용함

2) 공공 생산의 가격 계산(Calculating the price of public production)

- 본문에서는 노동 착취 제한을 부과하며 방정식을 사용하여 노동 및 원료의 잔차 값을 정의함

$$V_t^{LR} = Y_t^G P_t^0 - \sum_{i \in (b,m)} P_{i,t}^{I\lambda} K_{i,t}^\lambda$$

- 외생 변수 α_t^R 를 통해 인건비와 중간재 비용 간의 관계에 대한 가정을 추가하며, 변수는 데이터 연도에 내생적이며 이후 고정되거나 전망됨
- 식을 추가하여 인건비와 원료비를 정의하면 다음과 같음

$$P_t^R R_t = \alpha_t^R V_t^{LR}$$

$$P_t^L L_t = (1 - \alpha_t^R) V_t^{LR}$$

- 이를 사용하여 생산물 가격 지수를 계산하면 다음과 같음

$$P_t^0 = P_{t-1}^0 \frac{\sum_{i \in (b,m)} P_{i,t}^{I\lambda} K_{i,t}^\lambda + P_t^R R_t + P_t^L L_t}{\sum_{i \in (b,m)} P_{i,t-1}^{I\lambda} K_{i,t}^\lambda + P_{t-1}^R R_t + P_{t-1}^L L_t}$$

- P_t^0 에 대한 초기 조건이 필요한데 데이터에서 이용 가능하며 오른쪽의 분자는 정의상 $P_t^0 Y_t^0$ 와 같음
- 이 식과 일반적으로 본 장의 대수학에서의 표현식은 코드에서 약간 다르게 보이는데, 이는 여기 설명에서 필수적이지 않은 성장 보정항과 기타 세부 사항이 있기 때문

3) 실제 투자 결정

□ 외생적 수치 $\hat{\alpha}_t^K$ 에 의해 부과된 주요 제약은 다음과 같음

$$P_t^I K_{t-1} = \hat{\alpha}_t^K (0.7 \times (P_t^{YG} Y_t^G - P_t^R R_t) + 0.3 \times X_t)$$

- X_t 는 민간 부문의 부가가치를 측정하는 척도이며, 자본 K_{t-1} 은 이미 결정되어 있기 때문에 그대로 분석할 수 없음
- 운동법칙을 사용하여 K_t 를 제거하면 t기의 투자는 전체 모델의 균형에서만 구해지는 미래 예측 수량임

$$I_t = \frac{\hat{\alpha}_{t+1}^K}{P_{t+1}^I} (0.7 \times (P_{t+1}^{YG} Y_{t+1}^G - P_{t+1}^R R_{t+1}) + 0.3 \times X_{t+1}) - (1 - \delta_t^G) K_{t-1}$$

- $\hat{\alpha}_t^K$ 는 내생적이며 투자 측 데이터에 의해 나타남
- 여기에 새로운 가격 변수 P_t^{YG} 가 있으며, 이 변수는 관측 기간의 P_t^0 와 다르지만 2016년 이후에는 거의 동일해짐

나. 투자와 중간재의 구성 및 결정

□ 정부 규모의 변화는 부분적으로 외생적이며, 정부 지출의 일부 특정 구성 요소는 외부 추세 또는 사전에 결정된 관계에 따라 집계함

1) 중간재(Intermediate inputs)

- $P_t^R = pR[\text{'off'}, t]$ 와 $R_t = qR[\text{'off'}, t]$ 는 경제의 모든 부문에서 정부가 구매한 총계이며, 민간 부문과 마찬가지로 해외에서 구매한 것도 포함
- 소비 절에서 설명한 것처럼 수량 R_t 는 레온티에프 구조를 사용하여 9개 생산 부문에서 먼저 조달됨
- 정부는 주로 제조업과 서비스업에서 중간재를 얻으며, 에너지 및 건설업의 기여도는 작지만 상당한 편

$$R_t = \min\left(\frac{R_t^{man}}{\mu^{man}}, \frac{R_t^{ser}}{\mu^{ser}}, etc.\right)$$

- 여기서 $R_t^{man} = \mu^{man} R_t$ 이고 $R_t^{ser} = \mu^{ser} R_t$ 이며 $\sum_j \mu^j = 1$ 임
- 코드에서 이 모수들은 $\mu^s = uIO['off',s,t]$ 로 분류하며, $uIO[x,s,t]$ 는 수요 집합 x 를 9개의 생산 부문 s 로 구성된 공급 집합에 매핑
- 중간재의 경우 집합 $x = r$ 이며, s 를 s 로 매핑함
 - 일반적인 구조에서 9개 부문 모두 서로서로 중간재를 구매하기 때문

2) 투자

- (구성) 투자는 직접, 간접, 신규 투자로 분류하여 두 가지 유형의 자본재에 할당
 - 간접투자는 기존 자본을 매입하는 것으로, 전적으로 구조(건물) 자본에 할당
 - 신규 투자는 가중치 모수 $\mu_{b,t}^{NEW}$ 를 사용하여 두 가지 자본 유형에 할당
 - 직접투자는 거의 전적으로 공적자금을 지원받는 연구개발로 구성되어 있으며, 기계 투자에 할당
- 공공투자 V_t^{GI} 는 직접투자 V_t^{DIR} 와 간접투자 V_t^{IND} , 신규 투자 V_t^{NEW} 로 구성

$$V_{b,t}^{GI} = \mu_{b,t}^{NEW} V_t^{NEW} + V_t^{IND}$$

$$V_{m,t}^{GI} = (1 - \mu_{b,t}^{NEW}) V_t^{NEW} + V_t^{DIR}$$

- 총투자는 다음과 같이 구성되며

$$V_t^{GI} = V_{b,t}^{GI} + V_{m,t}^{GI} = V_t^{NEW} + V_t^{IND} + V_t^{DIR}$$

- 공공의 직접 및 간접투자 가치는 고정 요인 μ_t^{DIR} 와 μ_t^{IND} 에 경제의 명목 부가가치를 곱한 값으로 산출

$$V_t^{DIR} = \mu_t^{DIR} V_t^{BVT}$$

$$V_t^{IND} = \mu_t^{IND} V_t^{BVT}$$

- 직접투자 가격은 국가가 생산하는 상품을 효과적으로 구매하기 때문에 공공 생산물 가격과 같음

- 간접투자 가격은 구조물(건물)의 가격 $P_{b,g,t}^I$
- 신규 투자 가격은 건물 및 기계의 부문별 가격의 평균이며 $V_t^{NEW} = P_t^{NEW} I_t^{NEW}$ ⁴⁵⁾ 역시 성립

$$P_t^{NEW} = \mu_t^{NEW} (\mu_{b,t}^{NEW} P_{b,g,t}^I + (1 - \mu_{b,t}^{NEW}) P_{m,g,t}^I)$$

- 위의 관계는 데이터에 외생 구조를 부과하기 위해 사용되며 공공 부문의 특정한 투자 가격을 계산하는 데 사용되지 않음
 - 그 이유는 이러한 가격이 다른 모든 생산 부문과 동일하다고 가정하기 때문
 - 기계와 건물의 투자 가격은 모든 부문에 걸쳐 동일한데, 이는 모든 부문에서 동일한 구성으로 조달되고 국내 및 해외 상품 구성도 동일한 것으로 가정하기 때문

다. 수요 측면

- (구성) 공공생산 Y_t^G 은 투입-산출 시스템의 (공공 서비스의) 민간 소비 C^{PU} , (공공 서비스의) 공공 소비 G^{PU} , 공공 직접투자 I_t^{DIR} 등 세 가지 수요 구성 요소의 합

$$Y_t^G = C_t^{PU} + (G_t^{PU} + I_t^{DIR})$$

- 계획 시계(planning period)에서 민간 소비의 명목가치 $P_t^G C_t^{PU}$ 와 공공 직접투자의 명목가치 V_t^{DIR} 는 모두 외생화되며, 공공가격지수와 함께 C_t^{PU} 와 I_t^{DIR} 의 수량을 결정
- 남은 수요 측면 구성 요소는 공공 생산물의 공공소비 G_t^{PU} 이며, 총 공공소비 G_t 는 공공 생산물의 공공소비와 민간 생산물의 공공소비의 합 $G_t = G_t^P + G_t^{PU}$ 와 같음
- 공공소비의 명목 가치 V_t^{GC} 는 두 부분으로 분해됨
 - 하나는 공급 측면에서 설명한 자본의 감가상각비용
 - 다른 하나는 계수 F_t^N 과 경제의 총 임금소득(W_t 로 표시)을 사용하여 인구에 따라 변화하는 것으로, '모델링된' 나머지 금액으로 모수 μ_t^{GCxD} 를 사용

45) 직접투자는 개념적으로 공공 부문이 자체적으로 구매하지만 기계 가격으로 가격이 책정되는 투자이기 때문에 특정 항목이며 실제로 수량 I_m^{DIR} 은 사용하지 않고 값 V^{DIR} 만 사용함. 해당 수량은 가격 $P_{m,t}^I$ 로 대체 가능하나(could be recovered) 자본의 운동법칙을 이용하기 위해서는 기계에 대한 공공 투자의 총량만 필요함

$$V_t^{GC} = \sum_{k \in (b,m)} P_{k,t}^{I\lambda} K_{k,t}^\lambda + \mu_t^{GCx D} F_t^N W_t$$

○ 관련 수량 $(\mu_t^{GCx D} F_t^N W_t) / P_t^{GCx D}$ 는 자본의 감가상각비용을 제외한 실질(명목과 반대되는) 공공소비 $G_t^{Cx D}$ 임

- 수량은 계측 대상(calibration object)이며 계획 기간에 외생적임
- 이 경우 해당 수량에 대한 특정 가격 $P_t^{GCx D}$ 을 계산해야 하며, 이 계산은 다음과 같이 연쇄지수를 사용하여 이루어짐

$$\mu_t^{GCx D} F_t^N W_t \equiv P_t^{GCx D} G_t^{Cx D}$$

$$P_t^{GCx D} G_t^{Cx D} = P_t^G G_t - \sum_{k \in (b,m)} P_{k,t}^{I\lambda} K_{k,t}^\lambda$$

$$P_{t-1}^{GCx D} G_t^{Cx D} = P_{t-1}^G G_t - \sum_{k \in (b,m)} P_{k,t-1}^{I\lambda} K_{k,t}^\lambda$$

- 위 식에 포함된 총 공공소비의 가격 P_t^G 은 민간 부문 가격과 공공 생산의 가격을 합친 것
- 계획 기간 동안 실질 공공 소비 G_t 는 외생화된 $G_t^{Cx D}$ 에 의해 부분적으로 결정되는 내생 변수임
- 계획 기간 이후 $G_t^{Cx D}$ 는 내생적이며 G_t 는 외생화되어 인구통계학적 변동을 따르도록 설정됨

8. 구조적 고용과 구조적 총 부가가치

- 고용과 총 부가가치(gross value added, GVA)의 격차는 실제 수량과 구조적 수량의 차이로 정의되며, 재무부의 구조적 예산 수지 계산에 필요함
 - 구조적 고용은 균제상태의 고용과 유사하며, MAKRO의 구조적 고용은 실제 모델에서 노동시장의 장기 단순화 버전을 사용하여 계산됨
 - 구조적 GVA는 구조적 고용을 사용하여 계산됨
- MAKRO에는 구조적 노동력(a structural labor force)도 포함되는데 MAKRO의 노동력이나 실업은 내생적으로 결정되지 않는 대신 모형이 고용을 결정하고 외생적 규칙에 따라 추가 변수를 계산함

- 따라서 구조적 노동력이나 구조적 실업은 구조적 고용이나 구조적 GVA에 영향을 미칠 수 없음

가. 구조적 고용

- 재무부의 계산 법칙에 따르면 구조적 고용은 균제상태의 고용으로 간주되며, 고용 수준 자체는 장기적으로 인구가 변하기 때문에 일정할 수 없지만 인구 대비 고용 및 실업률과 같은 비율 측정은 가능

- MAKRO의 노동시장은 장기 고용이 임금 및 물가와 무관하도록 구성되어 있으며, 여기서는 구조적 고용을 계산하기 위한 단순화된 모델을 제공함
 - 실제 모형에서 연령별 고용에는 다음과 같이 운동법칙이 작용

$$n_{a,t}^e = \left[\underbrace{(1 - \delta_a) \frac{N_{a,t}}{N_{a-1,t-1}}}_{1 - \hat{\delta}_{a,t}} \right] n_{a-1,t-1}^e + x_t \cdot n_{a,t}^s$$

$$(1 - \delta_t^n) = \frac{\sum (1 - \hat{\delta}_{a,t}) n_{a-1,t-1}^e}{n_{t-1}^e}$$

- 이에 따라 다음의 식을 얻음

$$n_t^e = (1 - \delta_t^n) n_{t-1}^e + \hat{x}_t n_t^s$$

- 위 식에서 $n_{a,t}^e = N_{a,t} q_{a,t}^e$ 은 고용, δ_a 는 실직률(job separation rate), x_t 는 구직률(finding rate), $n_{a,t}^s$ 는 코호트의 직업 탐색 노력(cohort total search effort)이며 $n_{a,t}^s = N_{a,t} q_{a,t}^s$ 와 같음
- 총 운동법칙에 대응하는 균제상태는 다음과 같음

$$n_t^{e*} = (1 - \delta_t^{n*}) n_{t-1}^{e*} + x_t^* n_t^{s*}$$

- 여기서 구조적 취업률 x_t^* 과 구조적 탐색 노력 n_t^{s*} 은 모두 내생적
- 구조적 모델은 주로 코호트 특정 개체(cohort specific objects)를 보조 수량(auxiliary quantities)으로 사용하여 총 운동법칙을 사용함
- 노동시장의 기업 측면은 내쉬교섭 해(Nash bargaining solution)를 통합한 구인 공고에 대한 1계 조건의 집계 버전으로 요약됨

- 모형의 부문 j 표현식에서

$$1 - \frac{\partial(\chi_{j,t} n_{j,t})}{\partial n_{j,t}} = \frac{\hat{w}_{j,t}}{p_{j,t}^L \xi_{j,t}} + D_{j,t+1}^n \frac{p_{j,t+1}^L}{p_{j,t}^L} \left(\frac{\partial(\chi_{j,t+1} n_{j,t+1})}{\partial n_{j,t}} \right)$$

- 내쉬 해(Nash solution) $w = (1 - \phi^{nash})p^L$ 을 사용하여 집계된 개체를 생성하면

$$1 - \gamma_t^0 = (1 - \phi^{nash}) + \underbrace{\left[\beta_{t+1} \frac{p_{t+1}^L}{p_t^L} \right]}_{\text{average over sectors}} \left[\frac{D_{t+1}^n}{\beta_{t+1}} \right] \cdot \gamma_{t+1}^1$$

- 여기서 γ_t^i 는 각 도함수들의 균제상태를 표현

- 구조적 구직률(structural finding rate)은 다음과 같음

$$x_t^* = 1 - \frac{1}{1 + v_t^*/n_t^{s*}}$$

· 여기서 v_t^* 는 내생적인 구조적 구인 공고 수

○ 가계의 1계 조건에 의해 주어지는 개별 탐색(Individual search)은 다음과 같음

$$\begin{aligned} & \left[1 - r_{a,t}^b - \frac{1}{1 + \eta^h} \right]^{\eta^n / \eta^b} \\ &= \frac{\lambda_{a,t}^{n*} [q_{a,t}^{s*}]^{\eta^n}}{x_t^*} - (1 - \delta_{a+1,t+1}) \underbrace{s_a \beta_{a,t} \frac{Z_{a+1}^S \rho_{a+1}^e}{Z_a^S \rho_a^e}}_{\text{discount factor (exogenized)}} \frac{\lambda_{a+1,t+1}^{n*} [q_{a+1,t+1}^{s*}]^{\eta^n}}{x_{t+1}^*} \end{aligned}$$

○ 원칙적으로 MAKRO는 가장 최근 연도의 데이터만을 기반으로 계측하며, 탐색의 비효용성(disutility of search)에 대한 연령 분포 모수는 실제 고용과 맞도록 캘리브레이션됨

- 해당 모수를 사용하면 최근 데이터와 미래 데이터 모두에서 실제 및 구조적 고용이 산출됨

○ 다만 재무부는 구조적 고용 계산 법칙을 충족하는 등록 데이터를 기반으로 연령별 구조적 고용에 대한 전망을 실시

- 구조적 고용과 실제 고용이 수렴되기 위해서는 노동시장 참여의 실제적, 구조적 모수가 장기적으로 수렴되어야 함

나. 구조적 총 부가가치(GVA)

□ 구조적 총 부가가치 Y_t^* 는 종합 경제지표로서 다음과 같이 계산됨

$$Y_t^* = A_t^*(L_t^*)^\alpha K_t^{1-\alpha} + Y_t^{Exo}$$

- 여기서 A_t^* 는 구조적 TFP이고 L_t^* 는 위에서 계산된 구조적 고용 수준이며 K_t 는 모든 부문에서 실제로 실현된 자본스톡(경기순환에 영향을 받음), Y_t^{Exo} 는 경기순환에 영향을 받지 않는 부문의 GVA임
- 공공 부문은 외생적이고 경기순환에 영향을 받지 않으며 Y_t^{Exo} 의 일부임
- 주로 자본으로 구성된 채굴 부문과 주택 부문, 그리고 수요가 대부분 국내 경기순환에 외생적인 요인에 의해 주도되는 해상운송과 농업도 Y_t^{Exo} 에 포함
- 이 방법론은 재무부의 잠재적/구조적 GVA 계산과 동일한 원칙에 기초함
 - 구조적 TFP인 A_t^* 는 다음 식에 근거하여 계산됨

$$Y_t = A_t^*(u_t^L L_t)^\alpha (u_t^K K_t)^{1-\alpha} + Y_t^{Exo}$$

- 여기서 두 산출물($Y = GVA$)인 노동과 자본은 실현된 값이며, u_t^L 와 u_t^K 는 이 계산을 위해 통일된 노동 및 자본에 대한 가동률(capacity utilization)을 나타냄

9. 투입산출 체계

- 투입산출 매트릭스는 상품 및 서비스의 수요와 공급이 일치하는 시장 청산 조건을 구조화한 것
 - 국가 회계 분류에 따라 총수요는 민간소비지출 C , 정부소비지출 G , 투자지출 I , 수출 X , 요소투입물(원자재) R 로 구성되며, 이러한 수요는 국내 생산 Y 와 수입 M 과 일치함
 - 가계와 기업 모두에 대해 CES 수요 나무의 두 하위 수준은 독립적인 영 이윤의 중간재 부문으로 볼 수 있음
 - 여기서 소비재, 투자재 및 중간재가 다양한 생산 부문과 국내외에서 조달됨
 - 기업과 가계 수요의 특정 구성 및 수출 상품 구성의 특수성으로 인해 수요 분해를 8개 민간생산 부문과 매핑하기 위한 투입산출 시스템이 필요함

- 각각의 수요량(Each quantity demand object) $(q_{r,t}^R, q_{c,t}^C, q_{g,t}^G, q_{k,t}^I)$ 은 잠재적으로 모든 부문의 요소를 사용하여 상위 수준에서 생산되고 하위 수준에서는 국내 생산과 수입을 모두 사용
 - 국내 부문의 하위 수준 요소는 $q_{d,s,t}^{IOy}$ 이며, 수입되는 요소는 $q_{d,s,t}^{IOM}$
 - 투입산출 시스템의 항목에는 세 개의 아래첨자가 있는데, 수요 측면을 나타내는 집합 d 는 r, c, g, k, x 로 구성되며 공급 측면은 생산 부문 s 로 나타냄
 - 수요 측면 d 는 공급 측면 s 로부터 생산을 필요로 함
 - 국내 및 해외 공급은 $q_{r,s,t}^{IO} = CES(q_{r,s,t}^{IOy}, q_{r,s,t}^{IOM})$ 와 같이 CES 함수로 집계됨
- <표 II-12>는 수요 구성 요소(demand components)가 열벡터이고 공급 구성 요소가 행벡터인 투입산출표를 보여줌
 - $q_{r,s,t}^{IOy}$ 는 r 열들의 합계를 나타냄
 - <표 II-12>에서 2개 부문만을 고려하므로 $q_{r,2,t}^{IOy} = q_{r=1,1,t}^{IOy} + q_{r=2,1,t}^{IOy}$ 는 섹터 1 ($r=1$)과 2($r=2$)로부터의 원료 r 에 대한 수요를 충족시키기 위해 할당된 생산 부문 $s=1$ 의 산출물의 양
- 소비자 및 기업 절에는 본 절의 주제에 대한 부분적인 논의가 포함되어 있음
 - 먼저 0이 아닌 탄력성을 갖는 국내 및 해외 공급자의 구성 요인과 함께 부문별 수요를 분해함
 - <표 II-12>에 따르면 $q_{j,1,t}^{IOy}/q_{j,1,t}^{IOy}$ 가 상대 가격에 내생적으로 반응하는 것과 달리 $q_{j,1,t}^{IOy}/q_{j,2,t}^{IOy}$ 는 외생적인 상수임을 의미
 - 단일 공급 부문($s=1$) 내 국내 및 해외 공급원의 집계를 $q_{r,1,t}^{IO} = CES(q_{r,1,t}^{IOy}, q_{r,1,t}^{IOM})$ 로 나타냄

<표 II-12> 투입산출행렬(2개 부문 예시)

		Demand aimed at domestic and foreign suppliers							
		$q_{r,t}^R$		$q_{c,t}^C$		$q_{k,t}^I$		$q_{x,t}^X$	
Supply		$q_{r,s,t}^{IO}$		$q_{c,s,t}^{IO}$		$q_{k,s,t}^{IO}$		$q_{x,s,t}^{IO}$	
		D	F	D	F	D	F	D	F
Domestic	$Y_{1,t}$	$q_{r,1,t}^{IOy}$		$q_{c,1,t}^{IOy}$		$q_{i,1,t}^{IOy}$		$q_{x,1,t}^{IOy}$	
	$Y_{s,t}$	$q_{r,2,t}^{IOy}$		$q_{c,2,t}^{IOy}$		$q_{i,2,t}^{IOy}$		$q_{x,2,t}^{IOy}$	
Foreign	$M_{1,t}$		$q_{r,1,t}^{IOM}$		$q_{c,1,t}^{IOM}$		$q_{i,1,t}^{IOM}$		$q_{x,1,t}^{IOM}$
	$M_{s,t}$		$q_{r,2,t}^{IOM}$		$q_{c,2,t}^{IOM}$		$q_{i,2,t}^{IOM}$		$q_{x,2,t}^{IOM}$

주: 각 열은 s열의 수평 합계를 나타냄

출처: DREAM(2021), p. 158.

가. 시장 청산 가격

□ MAKRO에서 가장 세분화된 생산 수준은 s 로 색인화된 부문이며, 한 부문 s 의 모든 생산물은 누가 구매하든 상관없이 (세금 제외) 동일한 가격을 가진다

○ 간접세는 수요 측 요소에 따라 달라질 수 있으므로 세후 가격은 구매자에 따라 다를 수 있음

- 예를 들어 일반적으로 기업의 원자재에 부과되는 것보다 가계 소비재에 더 높은 간접세가 부과됨

- 구매자가 지불하는 수요 가격은 다음과 같으며, 아래에서 $P_{s,t}^Y$ 와 $P_{s,t}^M$ 는 구매자의 신분에 관계없이 생산자가 받는 가격

$$P_{d,s,t}^{IOy} = (1 + \tau_{d,s,t}^{IOy})P_{s,t}^Y$$

$$P_{d,s,t}^{IOM} = (1 + \tau_{d,s,t}^{IOM})P_{s,t}^M$$

- 국내 생산 및 수입에 대한 간접세율은 관세(customs and net duties) 및 부가가치세율로 구성

$$\tau_{d,s,t}^{IOy} = (1 + \tau_{d,s,t}^{NDy})(1 + \tau_{d,s,t}^{Vaty}) - 1$$

$$\tau_{d,s,t}^{IOM} = (1 + \tau_{d,s,t}^{Cus})(1 + \tau_{d,s,t}^{NDm})(1 + \tau_{d,s,t}^{Vatm}) - 1$$

- 관세율 $\tau_{d,s,t}^{Cus}$, 부가가치세율 $\tau_{d,s,t}^{Vatj}$ 은 모두 투입산출표에서 가져왔으며 외생적
- 순관세율 $\tau_{d,s,t}^{NDj}$ 도 투입산출표를 기준으로 총 관세 τ 에서 총 보조금 λ 을 뺀 세율로 구성

$$\tau_{d,s,t}^{NDy} = \tau_{d,s,t}^{Dy} - \lambda_{d,s,t}^{Dy}$$

$$\tau_{d,s,t}^{NDm} = \tau_{d,s,t}^{Dm} - \lambda_{d,s,t}^{Dm}$$

나. 수요 나무(Demand trees)

□ 특정 재화 d 는 서로 다른 부문 s 에서 생산된 서로 다른 재화의 구성이며, s 부문에서 재화 d 는 국내에서 생산된 요소 $q_{d,s,t}^{IOy}$ 와 수입된 요소 $q_{d,s,t}^{IOM}$ 의 합

○ 시장(markets)은 나무(tree)의 맨 하단에만 존재하며 가격은 시장 균형에 의해 결정됨

1) 수요 나무의 하위 부분, 표준적인 접근 방식

- 수입 및 국내 요소의 분해는 수요 나무의 하위 단계에서 이루어지며, 이 문제는 일반적으로 고정된 대체탄력성 $\eta \equiv \eta_{d,s}$ 를 가진 불변대체탄력성 집계방식(CES aggregator)으로 수량을 집계함으로써 풀이

$$q_{d,s,t}^{IO} = \left((\mu_{d,s,t}^{IOy})^{\frac{1}{\eta}} (q_{d,s,t}^{IOy})^{\frac{\eta-1}{\eta}} + (\mu_{d,s,t}^{IOM})^{\frac{1}{\eta}} (q_{d,s,t}^{IOM})^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right)^{\frac{\eta}{\eta-1}}$$

- 모형에서 두 개의 수요함수와 영(0) 이윤 제약식을 사용하여 해를 구함

$$q_{d,s,t}^{IOy} = \mu_{d,s,t}^{IOy} \cdot q_{d,s,t}^{IO} \cdot \left(\frac{P_{d,s,t}^{IOy}}{P_{d,s,t}^{IO}} \right)^{-\eta_{d,s}^{IO}}$$

$$q_{d,s,t}^{IOM} = \mu_{d,s,t}^{IOM} \cdot q_{d,s,t}^{IO} \cdot \left(\frac{P_{d,s,t}^{IOM}}{P_{d,s,t}^{IO}} \right)^{-\eta_{d,s}^{IO}}$$

$$P_{d,s,t}^{IO} q_{d,s,t}^{IO} = P_{d,s,t}^{IOy} \cdot (q_{d,s,t}^{IOy}) + P_{d,s,t}^{IOM} \cdot (q_{d,s,t}^{IOM})$$

2) 수요 나무의 하위 부분, MAKRO식 변형

- 본고에서 수요에 영향을 미치는 가격을 변경하여 위 구조를 수정하고 전체 설정을 다음과 같이 다시 작성하며, 명시적으로 CES Aggregator와 비율을 사용함

$$q_{d,s,t}^{IO} = \left((\mu_{d,s,t}^{IOy})^{\frac{1}{\eta}} (q_{d,s,t}^{IOy})^{\frac{\eta-1}{\eta}} + (\mu_{d,s,t}^{IOM})^{\frac{1}{\eta}} (q_{d,s,t}^{IOM})^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right)^{\frac{\eta}{\eta-1}}$$

$$\frac{q_{d,s,t}^{IOM}}{q_{d,s,t}^{IOy}} = \frac{\mu_{d,s,t}^{IOM}}{\mu_{d,s,t}^{IOy}} \cdot (R_{d,s,t}^{IOym})^{-\eta_{d,s}^{IO}}$$

- 천천히 변동하는 가격 객체(a slow moving price object)를 고려함

$$R_{d,s,t}^{IOym} = (R_{d,s,t-1}^{IOym})^{\lambda_{d,s}} \left(\frac{P_{d,s,t}^{IOM}}{P_{d,s,t}^{IOy}} \right)^{1-\lambda_{d,s}}$$

- 이에 따라 최종 제약식은 다음과 같음

$$P_{d,s,t}^{IO} q_{d,s,t}^{IO} = P_{d,s,t}^{IOy} \cdot (q_{d,s,t}^{IOy}) + P_{d,s,t}^{IOM} \cdot (q_{d,s,t}^{IOM})$$

3) 수요 관계도의 다음 단계(One step up the demand tree)

□ 이 단계에서의 구성은 고정된 비율에 따라 레온티에프 할당(Leontief allocation)을 따름

- $d = \{r, c, k, x\}$ 이며 $q_{d,s,t}^{IO} = \mu_{d,s,t}^{IO} q_{r,t}^D$ 식에 적용함
- $\mu_{d,s,t}^{IO}$ 는 계측된 모수이며 $q_{r,t}^D$ 는 기업의 최적 투입 결정과 가계의 최적 소비 결정에 의해 정해진 수량임
- 각 수요 측에서 다음의 식을 얻을 수 있음⁴⁶⁾

$$q_{r,s,t}^{IO} = \mu_{r,s,t}^{IO} \cdot q_{r,t}^R$$

$$q_{c,s,t}^{IO} = \mu_{c,s,t}^{IO} \cdot q_{c,t}^C$$

$$q_{k,s,t}^{IO} = \mu_{k,s,t}^{IO} \cdot q_{k,t}^I$$

$$q_{x,s,t}^{IO} = \mu_{x,s,t}^{IO} \cdot q_{x,t}^X$$

- $\mu_{c,s,t}^{IO}$ 는 부문 s 에 의해 생산되거나 수입되는 상품에 해당하는 총소비 수요 $q_{c,t}^C$ 의 비율
- $d = k$ 는 투자 유형을 식별하며, 투자재를 필요로 하는 부문이 아니기 때문에 투자식이 다른 경우와 동일하지 않음
 - 투자 구성은 모든 수요 부문에서 동일하여 부문별 색인은 생략함
- 나무의 이 단계에서 구매자가 특정 상품을 원하는 경우를 상정하여 s 부문에 대해 집계하며, 가격은 다음과 같이 성립함

$$P_{r,t}^R = \frac{\sum_s P_{r,s,t}^{IO} q_{r,s,t}^{IO}}{q_{r,t}^R} = \frac{\sum_s P_{r,s,t}^{IO} \mu_{r,s,t}^{IO} \cdot q_{r,t}^R}{q_{r,t}^R} = \sum_s P_{r,s,t}^{IO} \mu_{r,s,t}^{IO}$$

$$P_{c,t}^C = \frac{\sum_s P_{c,s,t}^{IO} q_{c,s,t}^{IO}}{q_{c,t}^C} = \frac{\sum_s P_{c,s,t}^{IO} \mu_{c,s,t}^{IO} \cdot q_{c,t}^C}{q_{c,t}^C} = \sum_s P_{c,s,t}^{IO} \mu_{c,s,t}^{IO}$$

46) 집합 i 의 재고투자(Inventory investments)는 다른 방정식에 의해 결정되기 때문에 집합 k 에 속하지 않음

$$P_{k,t}^I = \frac{\sum_s P_{k,s,t}^{IO} q_{k,s,t}^{IO}}{q_{k,t}^I} = \frac{\sum_s P_{k,s,t}^{IO} \mu_{k,s,t}^{IO} \cdot q_{k,t}^I}{q_{k,t}^I} = \sum_s P_{k,s,t}^{IO} \mu_{k,s,t}^{IO}$$

$$P_{x,t}^X = \frac{\sum_s P_{x,s,t}^{IO} q_{x,s,t}^{IO}}{q_{x,t}^X} = \frac{\sum_s P_{x,s,t}^{IO} \mu_{x,s,t}^{IO} \cdot q_{x,t}^X}{q_{x,t}^X} = \sum_s P_{x,s,t}^{IO} \mu_{x,s,t}^{IO}$$

4) 수입과 재수출(Import to reexport)

□ 직수출과 수출 후 재수입 간의 대체는 없음

- 수출과 관련하여 본 단계에서 수입된 혹은 국내산 투입물에 대한 두 가지 총량 (aggregate quantities)을 아래와 같이 정의함

$$q_{x,s,t}^y = \mu_{x,s,t}^{IOXy} \cdot q_{x,t}^{Xy}$$

$$q_{x,s,t}^m = \mu_{x,s,t}^{IOXm} \cdot q_{x,t}^{Xm}$$

다. 총량(Aggregates)

□ 각 부문의 생산물은 국내 생산과 수입에 대한 모든 수요 구성 요소의 합

$$Y_{s,t} = \sum_d q_{d,s,t}^{IOy}$$

$$M_{s,t} = \sum_d q_{d,s,t}^{IOm}$$

- 각 부문의 생산에는 균형 가격이 존재하므로 이러한 개체에는 명확한 가격이 있음
- 그러나 s 에 대한 집계 합산에서 한 단계 위로 이동하면 서로 다른 개체에 대해 합산 하기 때문에 가격과 수량에 대한 정의가 필요함

□ 수요 측 총량 (R_t, C_t, I_t, X_t)과 각각의 가격 ($P_t^R, P_t^G, P_t^I, P_t^X$) 및 (P_t^Y, P_t^M)을 가진 공급 측 요소 (Y_t, M_t)는 이론적인 물가 지수 또는 수량 집계함수(quantity aggregator)가 없음⁴⁷⁾

47) 주택 및 비주택 소비는 모델에서 정의하는 총 가격이 있으므로 이러한 문제에 직면하지 않음. 투자 수량(Investment quantities)은 선형적으로 집계되므로 주어진 유형(건물 또는 장비)의 총 투자 가격을 계산하기 위한 물가 지수가 필요하지 않음

- 따라서 우리는 해당 수량에 대해 파셰식(Paasche) 물가 지수와 라스파이레스식(Laspeyres) 지수를 사용
- $Z = R, G, I, X, Y, M$ 와 같이 포괄명(generic name)을 사용하여 다음과 같이 정의함

$$P_t^Z Z_t = \sum_d P_{d,t}^Z Z_{d,t}$$

- 여기에 지수 관계(index relationship)를 추가하면

$$Z_t P_{t-1}^Z = \sum_d P_{d,t-1}^Z Z_{d,t}$$

- 위 식에는 가격 및 수량의 동태적 지표 또한 포함되어 있음

$$Z_t = Z_{t-1} \frac{\sum_d P_{d,t-1}^Z Z_{d,t}}{\sum_d P_{d,t-1}^Z Z_{d,t-1}} \quad \text{and} \quad P_t^Z = P_{t-1}^Z \frac{\sum_d P_{d,t}^Z Z_{d,t}}{\sum_d P_{d,t-1}^Z Z_{d,t}}$$

- 이러한 방정식은 물가 지수가 불필요함에 따라 수량이 동질인 경우 단순화되며, 이러한 경우 지수 방정식을 수량 합계로 대체함

$$P_t^Z Z_t = \sum_d P_{d,t}^Z Z_{d,t} \quad \text{and} \quad Z_t = \sum_d Z_{d,t}$$

라. 투자⁴⁸⁾

- 기업은 건설 기간을 감안하여 한 기간 전에 최적의 자본스톡 수준을 결정하므로 $K_t = (1 - \delta_k)K_{t-1} + q_t^I$ 가 성립하는 최적의 투자 q_t^I 를 결정함
- 자본투자 $q_{k,t}^I$ 의 특정 유형 k 한 단위에 대한 공급 부문 s 의 기여는 모든 수요 부문 d 에서 동일하다고 가정
 - 수요 부문(예를 들어, 농업)이 장비 재고($k = iM$)를 축적하고자 하는 경우 장비 투자 한 단위를 만들기 위해 모든 부문 s 의 생산량을 사용함
 - 수요 나무 최하위 단계에 있는 국내 및 해외 공급원의 기여도 모든 부문에 동일하며, 이는 자본 k 의 주어진 유형 한 단위의 가격이 모든 부문에 걸쳐 $P_{k,t}^I$ 로 동일함을 의미

48) 투자제에 대한 수요는 기업 절에 자세히 설명되어 있음

- 이에 따라 추가적인 수요 측 색인을 포함한 가격 $P_{k,d,s,t}^{IOy}$ 와 $P_{k,d,s,t}^{IOM}$ 대신 $P_{k,s,t}^{IOy}$ 와 $P_{k,s,t}^{IOM}$ 로 구성

○ 그러나 국민계정에서는 동일한 자본재에 대한 투자 가격이 부문별로 다르므로 MAKRO 의 부문별 투자 수량은 국민계정 데이터와 일치하지 않음

- 모형에 부문별 가격에 대한 보정계수(correction factor) $\lambda_{k,d,t}^{PI}$ 를 추가하여 $P_{k,d,t}^I = \lambda_{k,d,t}^{PI} P_{k,t}^I$ 로 나타냄으로써 이를 보정함

1) 하단(Bottom)

□ 본 절에서 하단 가격(bottom prices)에 붙은 λ 를 소개하며, 수요 부문 d 에 대한 여러 변수에 추가 색인이 있어야 하지만 해당 색인들이 생략되어 있기 때문에 전체에 걸쳐 표기법을 중복 사용함

○ $d = \{k\} = \{iM, iB\}$ 및 $\eta_k = \eta_{k,s}$ 에 따라 다음이 성립

$$q_{k,s,t}^{IO} = \left((\mu_{k,s,t}^{IOy})^{\frac{1}{\eta_k}} (q_{k,s,t}^{IOy})^{\frac{\eta_k-1}{\eta_k}} + (\mu_{k,s,t}^{IOM})^{\frac{1}{\eta_k}} (q_{k,s,t}^{IOM})^{\frac{\eta_k-1}{\eta_k}} \right)^{\frac{\eta_k}{\eta_k-1}}$$

○ 이때, 각 CES 가격(구매자가 세금을 내므로 IO 구매자의 최저 가격)은 다음과 같음

$$\begin{aligned} P_{k,s,t}^{CESD} &= \left(\mu_{k,s,t}^{IOy} (\lambda_d P_{k,s,t}^{IOy})^{1-\eta_k} + \mu_{k,s,t}^{IOM} (\lambda_d P_{k,s,t}^{IOM})^{1-\eta_k} \right)^{\frac{1}{1-\eta_k}} \\ &= \lambda_d \left(\mu_{k,s,t}^{IOy} (P_{k,s,t}^{IOy})^{1-\eta_k} + \mu_{k,s,t}^{IOM} (P_{k,s,t}^{IOM})^{1-\eta_k} \right)^{\frac{1}{1-\eta_k}} \equiv \lambda_d P_{k,s,t}^{CES} \end{aligned}$$

- 영 이윤 조건에 따른 결과는 다음과 같음

$$\lambda_d P_{k,s,t}^{CES} q_{k,s,t}^{IO} = \lambda_d P_{k,s,t}^{IOy} \cdot q_{k,s,t}^{IOy} + P_{k,s,t}^{IOM} \cdot q_{k,s,t}^{IOM}$$

- 위 식은 λ_d 를 제외하고 다음과 같이 표기할 수 있음

$$P_{k,s,t}^{CES} q_{k,s,t}^{IO} = P_{k,s,t}^{IOy} \cdot q_{k,s,t}^{IOy} + P_{k,s,t}^{IOM} \cdot q_{k,s,t}^{IOM}$$

○ 수요 측 최적화로 수요함수를 도출하면 다음과 같음

$$q_{k,s,t}^{IOy} = \mu_{k,s,t}^{IOy} \cdot q_{k,s,t}^{IO} \cdot \left(\frac{\lambda_d P_{k,s,t}^{IOy}}{P_{k,s,t}^{CESD}} \right)^{-\eta_k} = \mu_{k,s,t}^{IOy} \cdot q_{k,s,t}^{IO} \cdot \left(\frac{P_{k,s,t}^{IOy}}{P_{k,s,t}^{CES}} \right)^{-\eta_k}$$

- $q_{k,s,t}^{IO}$ 에 대해서도 동일하게 성립함
- 두 번째 식은 수요함수의 가격비율이 λ_d 에 의존하지 않는다는 사실을 반영

2) 다음 단계(Next level)

□ 국내 생산 수준 대비 수입 외 부문별 투입량은 선형적으로 집계됨

$$q_{k,s,t}^{IO} = \mu_{k,s,t}^{IO} q_{k,t}^I$$

- $\mu_{k,s,t}^{IO}$ 에 수요 측 색인 d 가 없음에 주의⁴⁹⁾
- 여기서 색인 k 는 방정식이 설명하는 자본 유형(장비 또는 구조물)에 한정⁵⁰⁾
- 나무의 이 단계에서 가격 $P_{k,t}^I$ 는 다음과 같이 주어짐

$$P_{k,t}^I q_{k,t}^I = \sum_s q_{k,s,t} P_{k,s,t}^{CESD} = q_{k,t}^I \sum_s \mu_{k,s,t}^{IO} \lambda_d P_{k,s,t}^{CES} = \lambda_d q_{k,t}^I \sum_s \mu_{k,s,t}^{IO} P_{k,s,t}^{CES}$$

$$P_{k,t}^I = \lambda_d \sum_s \mu_{k,s,t}^{IO} P_{k,s,t}^{CES}$$

- λ_d 가 여러 부문에 걸쳐 집계되며, 이는 왼쪽 변수에서 추가 색인이 필요하다는 것을 의미

$$P_{k,d,t}^I = \lambda_d \sum_s \mu_{k,s,t}^{IO} P_{k,s,t}^{CES} \equiv \lambda_d \bar{P}_{k,t}^{CES}$$

3) 총 투자(Aggregate investment)

- 가격은 구매 부문에 따라 다르지만, 나무 맨 아래에 있는 수량은 모든 구매 부문에 대해 동일하게 구성됨
- 이에 따라 구매 부문을 평균화하여 장비(기계) 또는 구조물(건물)에 대한 총 투자 가격을 구성할 수 있으며, k 유형의 투자에 대해 다음의 식이 성립

$$P_{k,t}^I = \frac{\sum_d P_{k,d,t}^I q_{k,d,t}^I}{q_{k,t}^I} = \frac{\sum_d \lambda_d q_{k,d,t}^I}{\sum_d q_{k,d,t}^I} \bar{P}_{k,t}^{CES}$$

49) μ 요인의 합은 대략 1임

50) 수량 자체는 각 수요 부문이 얼마나 투자하는지에 따라 다르지만 여기서는 총 투자 수량만을 사용하기 때문에 수요 부문 색인을 보지 않음

- 코드에서 수요 측 색인은 identity mapping으로 인해 $d = s$ 로 표시

- 서로 다른 유형의 투자를 집계할 때 가격 및 수량 지수 방법을 사용해야 함

4) 재고투자(Inventory investment)

- 한 부문의 모든 재고투자가 자체 생산 과정(its own production)에서 나온다고 가정함

$$q_{iL',s,t}^{IO} = q_{iL',s,t}^{L-S}$$

- 여기서 재고투자의 명목 금액 $p_{iL',s,t}^{L-S} q_{iL',s,t}^{L-S}$ 는 해당 부문 s 에서 명목 생산의 외생적인 부분에 해당

마. 데이터와 캘리브레이션

- 부문별 집계 및 결과 투입산출 행렬은 덴마크 국민계정의 해당 명목 집계와 일치하지만 모델의 현재 버전에 대한 데이터는 ADAM의 데이터 뱅크를 기반으로 함
- ADAM은 12개 부문과 8개의 민간 소비 그룹, 1개의 정부 소비 그룹, 5개 투자 그룹, 8개 수출 그룹으로 구성
- ADAM에서 MAKRO의 소비, 투자 및 수출 그룹에 대한 직접적인 매핑이 있으며 그 매핑은 다음과 같음
 - 생산 부문 분해는 거의 ADAM에서 MAKRO로의 일대일 매핑과 같음
 - 농업(lan,a), 건설(byg,b), 석유 및 가스 채굴(udv,e) 주택(bol,h), 해상운송(soe,qs)은 동일함
 - 에너지는 ADAM에서 에너지 제조(ne)와 에너지 정제(ng)로 분해되지만 MAKRO에서 (ene,ne+ng)로 결합됨
 - 제조 또한 ADAM에서 식품(nf) 및 기타(nz)로 분해되나 MAKRO에서 (fre,nf+nz)로 결합됨
 - MAKRO의 민간 서비스 부문은 공공 및 금융 서비스를 포함하여 모든 공공 서비스를 제외한 모든 서비스로 정의됨에 따라 서비스(tje,qf+qz+o-o1)와 공공 서비스(off,o1)에 대한 매핑이 산출됨
- MAKRO 분류는 부처(ministries)와 관련된 방식으로 공공 부문을 정의

- 한 가지 단점은 각 부문에 일부 공공 생산이 있으며 서비스 부문에서 모든 것을 가져오는 것은 근사치에 불과하다는 것
 - 또 다른 단점은 공공 부문에 대한 이러한 정의에서 투입물 구조에 대한 정보가 없다는 점
 - 이는 공공 생산(off)에 대한 자재 투입량이 ADAM의 'o' 부문에 비례한다고 가정하고 공공 부문의 모든 납품이 공공 판매, 공공 직접투자 및 공공 소비로 간다고 가정함으로써 해결됨
- ADAM에서 모든 구매 부문의 자본재 투자는 공급 부문에서 동일한 요소의 기여(input contributions)를 포함하는 것으로 가정
- 국민계정 데이터에는 다양한 부문의 투자 유형에 대한 상세 정보가 포함되어 있음
 - MAKRO는 투입산출 시스템의 차원(dimensionality)을 줄이기 위해 동일한 가정을 함
- ADAM에서 수입은 제품 그룹별로 구분되지만 MAKRO에서는 소비 및 생산 분해의 결과로 외국 에너지 산업에서 수입하는 에너지 수입, 외국 제조 산업에 따른 기타 상품 수입, 외국 서비스 산업에 따른 서비스 수입으로 구분
- 모든 수입품은 위 세 가지 산업에서 나오며 이것은 모든 대체재가 상품, 서비스 및 에너지의 국내 생산과 관련되어 있음을 의미
 - 에너지는 외생적이며 내생적 대체재가 없음에 따라 많은 $\mu_{d,s,t}^{Iom}$ 모수는 0임⁵¹⁾
- 국민계정 투입산출표의 산업별 집계 데이터에서 건설, 채굴, 주택 및 공공 서비스 수입은 극히 적음
- 그러나 외국 농업과 해운 부문에서의 수입이 있어 이는 원칙적으로 국내 산업을 대체해야 하나 ADAM 데이터에 의존하는 한 방법은 명확하지 않음
 - 따라서 ADAM을 따르는 대신 제조 및 민간 서비스를 대체하도록 설정
- MAKRO에서 세전 하위 단계의 가격(bottom prices)은 모든 구매자에게 동일한 시장 청산 가격임

51) ADAM의 수입품은 MAKRO보다 더 세분화되어 식품, 석탄, 원유, 기타 원자재, 기타 에너지, 자동차, 선박 및 항공기 및 기타 제조업으로 구분되고, 식품 원료의 수입은 국내 식품 산업 산출물을 대체함. 다른 원자재의 수입은 ADAM에서 제조를 대체하고 제조 수입은 그 자체를 대체함(MAKRO와 동일). 그러나 MAKRO에서 다른 수입 그룹은 국내 생산을 대체하지 않음. 선박과 항공기는 규모가 크지 않으며 자동차는 수입 점유율이 너무 커서 대체가 미미함에 따라 주로 자동차 소비를 위한 투입물로 포함됨

- 이것은 국민계정에서는 해당하지 않으며, 이에 따른 부분은 MAKRO와 국민계정이 동일하지 않음
- 부문별 수입과 국내 생산의 총량은 모든 부문과 특정 수요 구성 요소에 대한 수입 구성 요소의 총 수량이 MAKRO와 국민계정에서 동일하도록 조정됨
- 합계는 라스파이레스(Laspeyres) 및 파셰(Paasche) 물가 지수로 계산되며, IO 방정식의 모든 가중치 모수(share parameters)는 MAKRO 투입산출 데이터에 따라 정태적으로 보정됨

바. 가중치 모수의 조정(Balancing share parameters)

- 외생 가중치 모수 $\mu_{d,s,t}^{IO}$, $\mu_{d,s,t}^{IOy}$, $\mu_{d,s,t}^{IOM}$ 는 외생 보조 변수 $\mu_{d,s,t}^{IO_0}$, $\mu_{d,s,t}^{IOy_0}$, $\mu_{d,s,t}^{IOM_0}$, $\lambda_{d,t}$, $\lambda_{d,s,t}^{IO}$ 를 사용하여 아래와 같이 구성

$$\mu_{d,s,t}^{IO} = \lambda_{d,t} \frac{\mu_{d,s,t}^{IO_0}}{\sum_s \mu_{d,s,t}^{IO_0}}$$

$$\mu_{d,s,t}^{IOy} = \lambda_{d,s,t}^{IO} \frac{\mu_{d,s,t}^{IOy_0}}{\mu_{d,s,t}^{IOy_0} + \mu_{d,s,t}^{IOM_0}}$$

$$\mu_{d,s,t}^{IOM} = \lambda_{d,s,t}^{IO} \frac{\mu_{d,s,t}^{IOM_0}}{\mu_{d,s,t}^{IOy_0} + \mu_{d,s,t}^{IOM_0}}$$

- 여기서 $D = R, C, G, I, X$, $d = r, c, g, i, x$ 수입

- 캘리브레이션에서 $\mu_{d,s,t}^{IO}$, $\mu_{d,s,t}^{IOy}$, $\mu_{d,s,t}^{IOM}$ 는 평소처럼 결정되며, $\sum_s \mu_{d,s,t}^{IO_0} = 1$ 과

$\mu_{d,s,t}^{IOy_0} + \mu_{d,s,t}^{IOM_0} = 1$ 에 따라 다음의 식을 얻음

$$\mu_{d,s,t}^{IO} = \lambda_{d,t} \mu_{d,s,t}^{IO_0}$$

$$\mu_{d,s,t}^{IOy} = \lambda_{d,s,t}^{IO} \mu_{d,s,t}^{IOy_0}$$

$$\mu_{d,s,t}^{IOM} = \lambda_{d,s,t}^{IO} \mu_{d,s,t}^{IOM_0}$$

- 여기서 $\lambda_{d,t} = \sum_s \mu_{d,s,t}^{IO}$ 이며 $\lambda_{d,s,t}^{IO} = \mu_{d,s,t}^{IOy} + \mu_{d,s,t}^{IOm}$ 임

1) 예외: 공공 직접 투자와 공공 판매

□ 외생 가중치 모수 $\mu_{d,s,t}^{IO}$, $\mu_{d,s,t}^{IOy}$, $\mu_{d,s,t}^{IOm}$ 는 외생 보조 변수 $\mu_{d,s,t}^{IO_0}$, $\mu_{d,s,t}^{IOy_0}$, $\mu_{d,s,t}^{IOm_0}$, $\lambda_{d,t}$, $\lambda_{d,s,t}^{IO}$ 를 사용하여 구성됨

○ 이 구조에서 두 가지 예외적인 경우로, 공공 부문에서 가계 소비로의 전달(deliveries) 에 대한 가중치 모수 $\mu_{c,s,t}^{IOy_0}$ 와 공공 부문에서 투자로의 전달을 위한 가중치 모수 $\mu_{i,s,t}^{IOy_0}$ (여기서 $s = gov$)는 내생적으로 주어짐

- $s = gov$ 에 대해 $d = serv$ 인 $q_{d,s,t}^C$ 와 $d = iM$ 인 $q_{d,s,t}^I$ 는 다음의 식에 따라 성립

$$p_{i,s,t}^I I_{i,s,t} = \mu_{i,t}^{Ig} V_t^{DIR}$$

$$p_{c,s,t}^C q_{c,s,t}^C = \mu_{c,t}^{Cg} V_t^{gsales}$$

- 위 식에 의해 공공 부문에서 투자 및 민간 생산으로의 납품(deliveries) 합계 값은 두 변수 V_t^{DIR} 및 V_t^{gsales} 에 의해 주어짐

· 두 변수는 투자 및 민간 소비 투입물에 대한 일반적인 수요를 따르지 않으며, 이는 공공 부문의 투입과 그에 따른 공공 생산이 민간 수요 구성 요소에 의해 내생적으로 영향받지 않음을 의미

참고문헌

- 정용승·송승주, 「가계부채 제약하의 통화정책: 2주체 거시모형(TANK)에서의 정량적 분석」, 『經濟分析』, 제25권 제2호, 한국은행 경제연구원, 2019. 6., pp. 1~53.
- Anderson, James E., “A Theoretical Foundation for the Gravity Equation,” *American Economic Review*, 69(1), 1979, pp. 106~116.
- Anderson, James E. and Eric van Wincoop, “Gravity with Gravitas: A Solution to the Border Puzzle,” *American Economic Review*, 93(1), 2003, pp. 170~192.
- Ampudia, M., R. Cooper, J. Le Blanc, and G. Zhu, *MPC Heterogeneity in Europe: Sources and Policy Implications*, 2019.
- Armington, P. S., “A Theory of Demand for Products Distinguished by Place of Production,” *International Monetary Fund Staff Papers*, 16, 1969, pp. 159~178.
- Attanasio, O., Peter Levell, Hamish Low, and Virginia Sanchez-Marcos, “Aggregating Elasticities: Intensive and Extensive Margins of Women’s Labour Supply,” *Econometrica*, 86(6), 2018, pp. 2049~2082.
- Bernanke, B. and M. Gertler, “Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations,” *American Economic Review*, 79, 1989, pp. 14~31.
- Blanchard, O., “On the future of macroeconomic models. Oxford Review of Economic Policy,” 34(Spring-Summer), 2018, pp. 43~54.
- _____, “Should we get rid of the natural rate hypothesis?,” NBER Working Paper 24057, November 2017.
- Blanchard, O. and S. Fischer, *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press, 1989.
- Blanchard, O. and J. Galí, “Labor Markets and Monetary Policy: A New-Keynesian Model with Unemployment,” NBER Working Papers 13897, National Bureau of Economic Research, Inc., 2008.

- Boldrin, Michelle, Lawrence J. Christiano, and Jonas Fisher, "Habit Persistence, Asset Returns, and the Business Cycle," *American Economic Review*, 91, 2001, pp. 149~166.
- Boserup, S., W. Kpoczuk, and C. Kreiner, "The Role of Bequests in Shaping Wealth Inequality: Evidence from Danish Wealth Records," *American Economic Review*, 106(5), May 2016, pp. 656~661.
- Browning, M. and M. Ejrnæs, "Consumption and Children," *Review of Economics and Statistics*, 91(1), 2009, pp. 93~111.
- Campbell, John Y. and N. Gregory Mankiw, "Consumption, Income and Interest Rates: Reinterpreting the Time Series Evidence," *NBER Macroeconomics Annual*, 4, 1989, pp. 185~246.
- Carroll, Christopher, *Death to the Log-Linearized Consumption Euler Equation! (And Very Poor Health to the Second-Order Approximation)*. Advances in Macroeconomics, 1, 2001, p. 1003.
- Christiano, L., M. Eichenbaum, and M. Trabandt, "Unemployment and Business Cycles," *Econometrica*, 84(4), July 2016, pp. 1523~1569.
- Cooper, R. and J. Adda, "Balladurette and Juppette: A Discrete Analysis of Scrapping Subsidies," *Journal of Political Economy*, 108(4), August 2000.
- Coibion, O. and Y. Gorodnichenko, "Is the Phillips Curve alive and well after all?," NBER Working Paper 19598, October 2013.
- Drechsel, T., *Earnings-Based Borrowing Constraints and Macroeconomic Fluctuations*, 2019 LSE Job Market paper, University of Maryland, 2021.
- Eaton, J. and S. Kortum, "International Technology Diffusion: Theory and Measurement," *International Economic Review*, 40(3), 1999, pp. 537~570.
- _____, "Technology, Geography, and Trade," *Econometrica*, 70(5), 2002, pp. 1741~1779.
- Gali, J. and M. Gertler, "Inflation Dynamics: A Structural Econometric Analysis," *Journal of Monetary Economics*, 44, 1999, pp. 195~222.

- Gali, J., Smets, F., and Wouters, R., "Unemployment in an Estimated New Keynesian Model," *NBER Macroeconomics Annual*, 26, 2012, pp. 329~360.
- Gomes, J. F., "Financing Investment," *American Economic Review*, 91, 2001, pp. 1263~1285.
- Gordon, R., "The Phillips Curve is alive and well," NBER Working Paper 19390, August 2013.
- Gourinchas, P. and J. Parker, "Consumption Over the Life Cycle," *Econometrica*, 70, 2002, pp. 47~89.
- Kaplan, G., K. Mitman, and G. L. Violante, "The Housing Boom and Bust: Model meets Evidence," NBER Working Paper 23694, August 2017.
- Kaplan, G., G. L. Violante, and J. Weidner, "The Wealthy hand-to-mouth," NBER Working Paper 20073, April 2014.
- King, Robert G., Charles I. Plosser, and Sergio T. Rebelo, "Production, Growth and Business Cycles," *Journal of Monetary Economics*, 21, 1988, pp. 195~232.
- Kocherlakota, N., *Modern Macroeconomic Models as Tools for Economic Policy*. Federal Reserve Bank of Minneapolis. Annual Report Essay, Narayana Kocherlakota, President, Minneapolis Federal Reserve Bank. May 4, 2010.
- Kravik, Erling Motzfeldt and Yasin Mimir, "Navigating with NEMO," 2019.
- Krugman, Paul R., "Increasing returns, monopolistic competition, and international trade," *Journal of International Economics*, Elsevier, 9(4), 1979, pp. 469~479.
- Krugman, P., "Scale Economies, Product Differentiation, and the Pattern of Trade," *American Economic Review*, 70(5), 1980, pp. 950~959.
- Kiyotaki, N. and J. Moore, "Credit Cycles," *Journal of Political Economy*, 105(2), 1997, pp. 211~248.
- Li, W., H. Liu, F. Yang, and R. Yao, "Housing over Time and over the Life Cycle: A Structural Estimation," *International Economic Review*, 57, 2016, pp. 1237~1260.
- Lian, C. and Yueran Ma, "Anatomy of Corporate Borrowing Constraints," *The Quarterly Journal of Economics*, 136, 2020, pp. 229~291.

- Ljungqvist, L. and T. Sargent, "The Fundamental Surplus," *American Economic Review*, 107(9), September 2017, pp. 2630~2665.
- Mankiw, G., "Hall's Consumption Hypothesis and Durable Goods," *Journal of Monetary Economics*, 10, 1982, pp. 417~425.
- Melitz, M., "The impact of trade on intra-industry reallocations and aggregate industry productivity," *Econometrica*, 71(6), 2003, pp. 1695~1725.
- Mortensen, D. and C. Pissarides, "Job Creation and Job Destruction in the Theory of Unemployment," *The Review of Economic Studies*, 61(3), 1994, pp. 397~415.
- Mortensen, Anne Ulstrup, "The Keynesian Multiplier in a CGE Model," Master Thesis, Institute of Economics, University of Copenhagen, 2015.
- Mortensen, M., D. Sisay, and T. Kristensen, "Export market index: forecast for latest historical period," Working Paper, Danmarks Statistik Modelgruppen, 2014.
- Pedersen, J., "An Estimated DSGE Model for Denmark with Housing, Banking, and Financial Frictions," Danmarks Nationalbank Working Paper N. 108, 2016.
- Petrongolo, B. and C. Pissarides, "Looking into the Black Box: A Survey of the Matching Function," *Journal of Economic Literature*, 39(2), June 2001, pp. 390~431.
- Rebelo, S., "Real Business Cycle Models: Past, Present, and Future," *The Scandinavian Journal of Economics*, 107(2), 2005, pp. 217~238.
- Rogerson, R., "Indivisible Labor, Lotteries and Equilibrium," *Journal of Monetary Economics*, 21, 1988, pp 3~16.
- Rotemberg, J., "Monopolistic Price Adjustment and Aggregate Output," *Review of Economic Studies*, 49(4), 1982, pp. 517~531.
- Sisay, D., "Export Market and Market Price Indices for ADAM," Working Paper, Danmarks Statistik Modelgruppen, 2013.
- Straathof, Bas., "Gravity with gravitas: comment," CPB Discussion Paper 111.rdf, CPB Netherlands Bureau for Economic Policy Analysis, 2008.

-
- Temere, Dawit S. and Tony M. Kristensen, "Supply factors in trade determination," Working Paper DSI080816, Danmarks Statistik Modelgruppen, August 2016.
- _____, "Incorporating supply effects in ADAM's export equations," Working Paper DSI111116, Danmarks Statistik Modelgruppen, November 2016.
- Yang, F., "Consumption over the life cycle: How different is housing?," *Review of Economic Dynamics*, 12, July 2009, pp. 423~443.

덴마크 MAKRO 재정전망 모형

발 행 2022년 12월 30일
발 행 인 김재진
발 행 처 한국조세재정연구원
30147 세종특별자치시 시청대로 336
TEL: 044-414-2114(代) www.kipf.re.kr
등 록 1993년 7월 15일 제2014-24호
조 판 및 쇄 (주)미래기획 044-866-6331
I S B N 979-11-6655-209-0
© 한국조세재정연구원 2022

* 잘못 만들어진 책은 바꾸어 드립니다.