

# 財政研究

## *Review of Fiscal Studies*

---

第10卷 第2號(通卷 19號)

2004年 8月

---

### 目 次

論文	한계세율의 측정방법에 관한 실증연구 ..... 노현섭 · 서갑수 · 서종길 ...	1
	레버리지가 기업투자결정에 미치는 영향 : System-GMM을 이용한 상장제조기업 패널 분석 ..... 조삼용 · 신선우 · 이훈현 ...	41
	무선 데이터 통신 과금체계에 대한 경제학적 고찰 ..... 김정유 ...	75
	Identification and Estimation of Nonparametric Structural Models by Instrumental Variables Method ..... 김우철 ...	95
英文抄錄	.....	161

## 한계세율의 측정방법에 관한 실증연구

노현섭\* · 서갑수\*\* · 서종길\*\*\*

### 요 약

한계세율은 자금조달 의사결정, 자본비용의 계산, 보상의사결정, 과세증권과 비과세증권 간의 상대적인 자산가격결정 등과 같은 다양한 재무의사결정에 있어 중요한 역할을 수행해 왔다. 그러나 한계세율을 측정하는 방법에 초점을 맞춘 연구는 거의 수행되지 않고 있다.

본 연구는 한계세율을 측정하는 최선의 방법에 초점을 맞추고 있다. 본 연구는 우리나라의 법인세법 규정을 고려하고 기업의 재무자료(KIS-FAS)를 사용하여 시뮬레이션 한계세율을 측정한다. 시뮬레이션 한계세율이 한계세율의 대체측정치에 비하여 합리적인 한계세율의 대리변수인지 여부를 분석하고, 시뮬레이션 한계세율을 입수할 수 없는 경우에 어느 대리변수가 적절한 대안이 될 수 있는지를 분석하였다.

본 연구에서 사용된 한계세율 대리변수에는 완전예측 한계세율, 시뮬레이션 한계세율, Manzon 한계세율 등 3 가지 한계세율 측정치와 범정한계세율, 과세소득 더미변수, 이월결손금 더미변수, 삼분변수와 4분변수 등 5가지 더미변수, 그리고 평균세율, Zimmerman 세율 등 2가지 유효세율 측정치 등이 있다. 분석결과 시뮬레이션 한계세율이 '진실한' 한계세율을 예측하는 데 가장 우수한 측정치라는 것을 알 수 있다. 완전예측 한계세율을 비교기준으로 사용한 분석에서는 시뮬레이션 한계세율이 다른 대리변수에 비하여 예측능력이 우수한 것으로 나타났다.

\* 경남정보대학 경영학부 경영정보계열 교수

\*\* 인제대학교 경영학부 교수

\*\*\* 인제대학교 경영학부 강사, 세무사

## I. 서 론

한계세율(MTR: marginal tax rates)은 자금조달 의사결정(부채정책), 자본비용의 계산, 보상 의사결정, 자산가격결정(과세증권과 비과세증권 간의 상대적인 가격결정) 등과 같은 다양한 재무 의사결정에 있어 중요한 역할을 수행한다.<sup>1)</sup> 이와 같은 한계세율의 중요성에도 불구하고, 한계세율을 직접 계산하는 것은 아주 어렵다. 따라서 한계세율을 측정하는 방법에 초점을 맞춘 연구는 거의 수행되지 않고 있다(Graham, 1996a, 1996b).

한계세율이 재무 의사결정에 있어 중요한 역할을 수행함에도 불구하고 한계세율의 측정에 대한 연구가 많이 수행되지 않았던 이유는 한계세율을 직접 계산하기 위해서는 이월결손금, 투자세액공제와 최저한세 등 한계세율에 영향을 미칠 수 있는 복잡한 법인세법 규정을 반영하여야 하지만 세무조정자료가 기밀로 처리되고 있어 입수가 불가능하다는 데 기인한다.

Scholes and Wolfson(1992)은 한계세율을 당해연도의 1원의 추가 과세소득의 증가에 대해 과세당국에 납부하여야 할 현금흐름 현가의 변동으로 정의하여 한계세율의 정의와 한계세율을 이용한 기업의 세무전략에 대한 사례를 제시하여 한계세율에 대한 이해를 확장시켰다. 또한 Shevlin(1990)과 Graham(1996a)은 이월결손금, 투자세액공제, 최저한세를 고려한 시뮬레이션을 사용하여 한계세율을 측정하는 방법을 개선하였다.

Graham(1996a)은 Shevlin(1990)의 연구를 확장하여 시뮬레이션을 사용한 한계세율 측정치를 기존 연구의 한계세율 대리변수와 비교함으로써 가장 합리적

1) 한계세율은 조세선호현상과 조세차익거래의 기회를 제공하기 때문에 기업의 경영자와 조세정책의 입안자에게 중요한 영향을 미친다. 조세선호현상(tax clienteles)은 과세유리자산을 선호하는 투자자집단과 과세불리자산을 선호하는 투자자집단이 별도로 존재하는 현상을 말한다. 조세차익거래, 즉 조세선호현상을 이용한 차익거래(arbitrage)는 암묵세 부담과 명시적 조세부담의 교환을 통하여 이루어진다. 이와 같이 한계세율은 기업의 투자 및 재무의사결정에 중요한 영향을 미치기 때문에 한계세율의 측정치를 파악하는 것이 매우 중요하다.

조세선호현상과 조세차익거래에 대한 자세한 설명은 이준규(1997, pp. 130-136)를 참조.

인 한계세율 대리변수가 무엇인지를 분석하였다. 우리나라의 경우 Shevlin(1990)의 연구방법을 사용하여 시뮬레이션 한계세율을 추정한 이준규(1997)의 연구와 Graham(1996a)의 연구방법을 사용하여 한계세율 대리변수를 평가한 고종권(2002)의 연구를 제외하고는 한계세율의 측정에 대한 연구는 이루어지지 않고 있다.

선행연구에서 한계세율 측정치는 완전예측 한계세율, 시뮬레이션 한계세율, Manzon 한계세율 등 한계세율 측정치와 법정한계세율, 과세소득 더미변수, 이월결손금 더미변수, 3분변수와 4분변수 등 더미변수는 물론 평균세율, Zimmerman 세율 등 유효세율 측정치를 사용하기도 하였다. 이와 같이 선행연구에서 많은 한계세율 측정치가 사용되고 있지만 우리나라 기업환경하에서 어떤 한계세율 측정치가 적합한지에 대해서는 거의 연구되지 않고 있다.

따라서, 본 연구에서는 Shevlin(1990), Manzon(1994), Graham(1996b) 등의 선행연구를 중심으로 대체적인 한계법인세율 측정치를 종합하고, 우리나라의 법인세법 규정을 고려하여 한계법인세율을 측정하는 방법을 이론적으로 검토하고 실증적으로 분석하였다. 분석방법은 선행연구에서 사용되고 있는 한계세율에 대한 대리변수들을 사후적인 실제한계세율(즉, 완전예측 한계세율)과 비교함으로써 어느 대리변수가 한계세율에 대한 합리적인 대리변수인지를 검증한다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 제 I 장 서론에 이어, 제 II 장에서는 한계세율의 정의와 관련 법인세법 규정 및 한계세율에 대한 이론적 배경을 검토하고 한계세율의 측정에 대한 선행연구를 요약하였다. 제 III 장에서는 한계세율의 측정과 타당성을 분석하기 위한 연구설계에 대해 논의하였고, 제 IV 장에서는 실증분석결과와 해석을 제시하였다. 마지막으로 제 V 장에서는 연구를 요약하고 결론을 제시하였다.

## II. 이론적 검토와 선행연구

### 1. 한계세율의 측정

#### 가. 한계세율의 정의와 추정

대부분의 세무연구들은 한계세율<sup>2)</sup> 추정치 또는 대리변수를 필요로 하며, 세무분야 이외의 많은 연구들도 가능한 조세효과를 통제하기 위하여 한계세율 추정치를 필요로 한다.<sup>3)4)</sup> 세무연구 이외의 연구분야에 대한 세무회계연구의

- 
- 2) 일반적으로 유효세율은 평균유효세율(average effective tax rates)과 한계유효세율(marginal effective tax rates)로 구분하며, 선행연구에서는 평균유효세율을 유효세율, 한계유효세율을 한계세율이라 부르고 있다. 또한, 선행연구에서는 조세 중 주로 법인세를 중심으로 분석하였으므로, 유효세율은 유효법인세율과 한계법인세율을 중심으로 분석하였다. 따라서, 본 연구에서는 유효세율과 한계세율이라는 용어를 사용한다.
- 유효세율의 정의, 측정 및 선행연구에 대한 개관은 Callihan(1994), Omer, Molly and Ziebart(1991) 등을 참조.
- 3) 본 연구는 한계세율을 측정하기 위한 이론적 배경과 선행연구를 검토하고 한계법인세율 추정치를 측정하고 타당성을 분석하기 위한 연구로서 다음과 같은 이유로 한계세율 관련 회계학문헌을 중심으로 검토하였다.
- 한계세율에 대한 기존연구는 개별 투자에 대한 한계세율과 개별 기업에 대한 한계세율로 나누어 수행되었다. 개별투자에 대한 한계세율은 특정 투자기회를 추구하는 유인을 조사하는 데 적절한 반면에, 개별기업에 대한 한계세율은 기업의 의사결정에 대한 조세정책의 영향을 분석하는 데 더 관련성이 있을 수 있다.
- 재정학에서는 주로 개별투자에 대한 한계세율을 사용하며, 회계연구에서는 개별기업에 대한 한계세율을 사용하여 다양한 주제를 연구하고 있다. 개별 투자에 대한 한계유효세율을 측정한 연구로는 Bradford and Stuart(1986), Stark(1985), Auerbach and Hines(1988)의 연구가 있으나 모두 공공경제학 측면에서 수행된 연구이다(Callihan, 1994). 본 연구는 이러한 두 가지 한계세율 중 개별기업의 한계세율(특히, 한계법인세율)에 초점을 맞추고 있다.
- 또한 하나의 연구에서 이러한 관련 연구를 모두 검토하는 것은 어려움이 있으므로, 본 연구는 회계학문헌을 중심으로 개별기업의 한계세율(특히, 한계법인세율)의 측정 및 타당성 검토에 초점을 맞추고 있다. 한계세율에 대한 추정치가 필요한 회계연구 분야는 LIFO/FIFO, 기업의 조직구조, 기업의 투자와 자금조달 선택, 부채비용에 대한 세후 추정치와 연금비용, 그리고 세법변경에 관한 연구 등이 있다(Shevlin, 1990, p. 52, fn. 3).
- 4) 본 연구에서 초점을 맞추고 있는 회계상의 한계세율을 측정하는 연구 이외에 재정학에서는 Jorgenson(1963) 이후 기업의 투자결정에 영향을 미치는 자본소득세율에 관

공헌 중 한 가지는 다양한 한계세율 추정치를 개발하고 평가하였다는 것이다 (Shackelford and Shevlin, 2001, p. 364).

한계세율을 측정한 선행연구는 한계세율을 다음과 같이 정의하고 있다. Shevlin(1990, p. 52)은 과세소득과 결손금에 대한 세무상 상이한 처리와 다기간 속성을 고려하여, 한계세율을 당해 과세연도의 추가 과세소득의 증가에 대하여 과세당국에 납부하여야 할 현금흐름 현가의 변동으로 정의하였다.<sup>5)</sup>

한계세율에 대한 정의를 종합하여, Scholes and Wolfson(1992, p. 146)과 Scholes, et al.(2002, p. 157)은 한계세율을 당해 과세기간에 있어 추가 1달러의 과세소득을 획득하였을 때 과세당국에 납부(또는 환급)하여야 할 현금흐름의 현재가치에 있어서의 변동으로 정의하였다. 이 정의는 법인세법의 비대칭성과 다기간 속성을 고려하고 있다.<sup>6)</sup>

위에서 살펴본, 한계세율 정의는 법인세법의 결손금에 대한 상이한 처리와 다기간 속성을 고려하고 있다. 과세소득은 당기에 과세되며, 세무상 손실(즉, 결손금)은 다른 연도에 발생한 과세소득과 상계하기 위하여 소급공제(중소기업에 한하여 1년)되거나 이월공제(5년)된다.<sup>7)</sup> 따라서, 경영자들은 기업의 과거

한 연구에서 주로 활용되고 있는 tax wedge를 측정하는 한계유효세율(marginal effective tax rate)에 관한 연구도 이루어지고 있으며, Jorgenson류의 한계유효세율의 측정 및 투자에 미치는 영향에 대한 국내연구로는 곽태원(1985), 윤건영(1988), 김준영(1991), 김유찬(1994), 윤종인(2000) 등의 연구가 있다.

- 5) 한계세율에 대한 정의와 중요성 및 다기간 속성에 관한 자세한 설명과 계산 예 등에 대해서는 Scholes and Wolfson(1992)과 Scholes, et al.(2002), Shevlin(1990), 이준규·이은상(2001), Shackelford and Shevlin(2001) 등을 참조.
- 6) Sholes, et al.(2002)의 정의에 대해 좀 더 자세히 살펴보면, 이들은 한계세율을 추가(또는 한계) 1달러의 과세소득에 대해 납부하여야 할 (명시적 및 암묵적) 당기 및 이연 법인세의 현가로 정의하였다. 여기서, 미래기간의 조세부채에 미치는 당기 1달러 과세소득의 영향을 포함시키기 위하여 한계세율의 정의를 확장하였다는 것을 주목해야 한다. 그리고, 총조세가 투자의사결정에 중요하기 때문에, 한계세율은 명시적 조세(explicit taxes) 뿐만 아니라 암묵세(implicit taxes)도 포함하며, 이들 한계세율은 각각 한계명시세율(marginal explicit tax rate)과 한계암묵세율(marginal implicit tax rate)이라 한다(Scholes, et al., 2002, p. 157; Shackelford and T. Shevlin, 2001, p. 365). 암묵세에 대한 자세한 논의는 Scholes, et. al.(2002, pp. 98~119)과 Shackelford and Shevlin(2001, pp. 348~350)을 참조.
- 7) 한계세율은 이월결손금의 영향만을 받는 것이 아니다. 중소기업의 경우 특별세액공제가 존재하므로 한계세율은 중소기업 여부로 구분하는 것이 필요하며 또한 최저한

조세관련 특성과 예상되는 미래 조세관련 특성을 반영한 세율을 사용하여 의사결정을 할 것이다.

예를 들어 기업이 과거에 과세소득을 초과하는 세무상 비용이 발생하였으며, 이에 따라 20원의 결손금이 발생하였고, 이러한 결손금은 3년간 이월하여 미래 과세소득에 대해 세무상으로 활용할 수 있다고 하자. 투자 및 자금조달계획은 고정되어 있고, 이들 계획으로부터 기업은 현재부터 시작되는 사업연도 초에 8원의 미래과세소득이 발생할 것으로 예상하며, 당기의 법인세율은 40%이고 법인세율의 변화는 없다고 가정한다.

이월결손금이 없다면, 미래의 세무상 손실이 당기에 소급되지 않는다고 할 경우 추가 1원의 과세소득에는 40%의 한계세율이 적용되어 0.4원이 과세되지만, 2원의 이월결손금이 있다면 추가 1원의 과세소득에 대한 과세는 없게 될 것이다. 당기의 조세부채가 0이라고 기업의 한계세율이 0이라는 것을 의미하지는 않는다.

매년 8원의 과세소득을 예상하는 것은 기업이 3년 동안 조세를 부담하게 된다는 것을 의미한다. 따라서 현재 추가 1원의 과세소득은 향후 3년 동안 40%의 조세납부의 계기가 된다. 기업이 세후현금흐름을 매년 8%로 할인하면 0.3175원( $0.40/1.08^3$ )의 증분조세의 현가 또는 31.75%의 한계세율을 산출하게 된다.

위와 같은 내용을 공식으로 표시하면 다음과 같이 표시할 수 있다. 즉 이월결손금이 있는 기업의 경우, 당기 한계세율은 다음과 같이 계산된다.

$$MTR = (\$W1 \times str_s) / (1+r)^s \quad (2-1)$$

여기서, MTR은 한계세율을,  $str_s$ 는 s기의 예상 법정세율을, r은 기업의 세후할인율을 의미한다.

---

세가 존재한다는 점도 한계세율에 영향을 미치게 된다. 따라서 이들 제도의 적용 대상 여부에 대해서도 구분하는 것이 필요하다. 그러나, 본 연구는 주로 상장기업을 대상으로 하고 있으므로 중소기업의 가능성이 낮을 것이다.

따라서 만일 당기 법정세율이 다음 과세연도에 25%로 인하될 것으로 예정되어 있다면, 이월결손금이 있는 기업의 당기 한계세율은 19.84%(즉,  $0.25/1.08^3$ )이며, 이월결손금이 없는 기업의 한계세율은 40%로 변동하지 않는다. 이와 유사하게, 만일 법정세율이 다음 과세연도에 55%로 인상될 것으로 예상된다면, 이월결손금이 있는 기업의 당기 한계세율은 43.66%(즉  $0.55/1.08^3$ )가 될 것이다.

위와 같은 분석에서 현재가치를 고려할 경우 향후 결손금의 이월공제가 나타나는 시점에 따라 한계세율이 달라지게 됨을 알 수 있다. 즉, 향후 법인세율의 인상이 있는 경우에는 이월결손금이 있는 기업의 당기 한계세율이 이월결손금이 없는 기업의 한계세율보다 커질 수도 있으며, 향후 법인세율의 인하가 있는 경우에는 이월결손금이 있는 기업의 당기 한계세율이 이월결손금이 없는 기업의 한계세율보다 작아질 수도 있는 것이다.

#### 나. 한계세율 측정 관련 세법 규정

##### (1) 한계세율 관련 법인세법 규정

법인세법에서는 각 사업연도의 소득과 결손금에 대해 서로 다르게 처리하도록 규정하고 있다. 즉 법인의 각 사업연도 소득이 양(+)인 경우에는 과세소득에 법정세율을 적용하여 과세하며, 과세소득이 음(-)인 경우(즉, 결손금이 발생한 경우) 결손금은 장래 사업연도의 법인세와 상쇄하기 위하여 이월공제된다.

현재 우리나라의 법인세법에서는 기업이 결손금을 소급공제<sup>8)</sup>하거나 5년 동안(1988년 이전에는 3년간) 이월공제할 수 있다(법인세법 제72조, 제13조). 즉

8) 중소기업의 경우 결손금이 발생하는 경우, 1997년 1월 1일부터 중소기업에 한하여 직전 1년에 한해 결손금을 소급공제할 수 있었으나, 2001년 8월 세법개정을 통해 직전 2년에 대해 소급공제를 인정하고 있다.

본 연구에서는 다음과 같은 이유로 소급공제를 고려하지 않는다. 첫째, 본 연구의 분석대상기업이 상장기업을 대상으로 하고 있으므로 중소기업으로 분류되는 기업이 많지 않다. 둘째, 중소기업의 소급공제제도가 1997년부터 시행되고 있으므로 본 연구의 분석대상기간에는 적용되지 않는다.

현재 소급공제(이월공제) 기간은 1(5)년으로 제한되어 있다.

이러한 과세소득과 결손금에 대한 세무상 상이한 처리와 다기간 속성을 고려하면, 다른 연도의 과세소득(또는 결손금)이 기업의 당기 한계세율을 감소시킬 수 있으므로 기업의 투자, 자금조달과 보상의사결정에 영향을 미치게 될 것이다. 즉, 현재와 같은 이월결손금 공제제도에서, 특정 사업연도의 한계세율은 과거 사업연도의 과세소득(또는 결손금)의 발생 상황과 이후 5년간의 과세소득(또는 결손금)의 발생 상황에 따라 좌우될 것이다. 과세소득은 당기에 과세되며, 세무상 손실(즉, 결손금)은 다른 연도에 발생한 과세소득과 상계하기 위하여 소급공제(중소기업에 한하여 1년)되거나 이월공제(5년)된다. 따라서, 경영자들은 기업의 과거 조세관련 특성과 예상되는 미래 조세관련 특성을 반영한 세율을 사용하여 의사결정을 할 것이다.

## (2) 법인세율의 변천

본 연구에서는 한계세율 추정기간을 1991년부터 1996년까지로 하였으며, 이에 따라 실증분석 대상기간은 1980년부터 2001년까지의 기간이 된다. 따라서 이 기간에 대한 법인세와 관련 조세의 변천내용을 요약하면 <표 2-1>과 같다.

2003년 현재 상장영리법인의 법인세율은 과세표준 1억원을 기준으로 하여, 그 이하인 경우에는 15%, 그 초과분은 27%로 2단계 초과누진세율구조로 이루어져 있다. 그러나 실제 법인이 부담하는 법인세 관련 조세는 법인세에 부가되는 방위세(1995년 이후에는 농어촌특별세)와 주민세가 포함된다.

방위세의 과세표준은 법인세법 규정에 따라 계산된 법인세 산출세액인데, 5억원을 기준으로 20%와 25%로 구분된다. 감면, 면제, 비과세의 감면세액에는 5억원을 기준으로 각각 30%와 37.5%가 가산된다. 방위세는 1990년 12월 31일로 폐지되었다.

WTO에 대응한 농어촌 투자자원을 확보하기 위한 한시세로 도입된 농어촌특별세는 조세특례제한법에 의한 비과세, 소득공제, 세액공제, 세액감면을 받은 기업과 법인세 과세표준이 5억원을 초과하는 법인 등을 과세대상으로 하고 있

으며, 각각 조세감면액의 20%와 5억원 초과액의 2%의 세율이 가산된다.

또한 주민세는 소득할 주민세가 법인세액을 과세표준으로 하여 10%의 세율로 과세된다.

<표 2-1> 법인세율의 변천

(단위: %)

구분 연도	최저 법인세율			최고 법인세율				
	법인세	방위세 및 농어촌특별세	주민세	법인세율	법인세	방위세 및 농어촌특별세	주민세	법인세율
1980	20	방위세 20	7.5	25.5	30	방위세 20 또는 25	7.5	38.25
1981~82	22			28.05	33			42.075
1983~88	20			25.5	30			38.25
1989~90		21.5	34	36.55				
1991~93	18	방위세 폐지	10.0	19.35	32	방위세 폐지	10.0	34.4
1994		농어촌특별세		19.71	30	농어촌특별세		32.25
1995	16	2	10.0	17.6	28	2	10.0	30.8
1996~2001				16.5	27			29.7
2002	15							

- 주: 1. ‘법인세율’은 각 연도에 적용될 법인세 등의 세율을 의미하며, 다음과 같이 계산함.  
 법인세율 = 법인세율 × (1 + 방위세율 + 주민세율)  
 예를 들어, 1980년의 법정세율은 30%(1 + 0.2 + 0.075), 즉 0.3 + 0.3×0.2(방위세율) + 0.3×0.075(주민세율)로 38.25%가 계산된다.
2. 최고세율과 최저세율은 1980년 500만원, 1981년 이후 과세표준 5천만원, 1989년 이후 8천만원, 1991년 이후에는 1억원을 기준으로 구분됨.  
 1980년, 1981년, 1982년의 공개법인에 대한 세율은 1인 지배비율이 35% 이하인 경우에는 각각 30%, 33%, 33%의 세율이 적용되고, 1인 지배비율이 35%를 초과하는 경우에는 각각 35%, 40%, 38%의 세율이 적용되었다.
3. 방위세는 1975년부터 1990년까지 존속(1990. 12. 31자로 폐지)되었다. 방위세의 과세표준은 법인세법 규정에 따라 계산된 법인세 산출세액이며, 5억원을 기준으로 20%와 25%로 구분되며, 감면, 면제, 비과세의 감면세액에는 5억원을 기준으로 각각 30%와 37.5%가 가산됨.
4. 농어촌특별세의 과세표준은 조세감면규제법에 의한 비과세, 소득공제, 세액공제, 세액감면을 받은 기업(조세감면액의 20%)과 법인세 과세표준이 5억원을 초과하는 법인(5억원 초과액의 2%)에 적용되므로, 본 연구의 실증분석에서는 고려하지 않음.
5. 주민세는 법인세할 주민세로 법인세액을 과세표준으로 하여 부과되며, 1995년까지는 7.5%, 1996년 이후에는 10%가 적용됨.

## 2. 한계세율 측정 관련 선행연구

기업의 한계세율에 대해 분석한 기존연구에는 Shevlin(1990), Manzon(1994), Graham (1996a)의 연구들이 있다. 우리나라의 경우 한계세율의 측정에 관한 연구는 이준규(1997)와 고종권(2002)의 연구를 제외하고는 거의 수행되지 않고 있다.<sup>9)</sup>

Shevlin(1990)은 시뮬레이션을 사용하여 1975년(200개 기업)의 한계세율을 추정하였다. 실증분석 결과에 의하면 한계세율은 평균 29.59%로 유효세율 19.23%와 상당히 차이가 있는 것으로 나타난다. 그러므로 유효세율은 한계세율의 대리변수로서 적합하지 않으며, 결손이 발생하였거나 이월결손금이 있는 기업의 한계세율이 평균 25.26%이어서 이월결손금이 있는 법인의 한계세율은 0이 아닌 경우가 많을 뿐 아니라 법인별 격차가 크다는 것을 확인하였다. 연구결과 시뮬레이션을 사용한 한계세율 측정치는 기업의 실제 사후과세이익을 사용하여 추정한 완전예측 한계세율과 아주 유사한 결과를 나타내었다. 따라서 Shevlin(1990)의 시뮬레이션을 사용한 한계세율 측정방법은 한계세율에 대한 신뢰가능한 측정치를 제공해 준다 할 것이다.

Manzon(1994)은 조세가 부채의 조기상환에 미치는 영향을 분석한 연구에서, 이월결손금이 있는 기업의 한계세율을 추정하는 단순한 모형을 개발하였다. Manzon(1994)은 조세관련 기업특성이 부채의 기간별 변동에 미친 영향을 분석하였는데, 분석결과를 보면 세율이 낮은 기업은 효율적으로 사용할 수 없는 이자

9) 한계세율의 측정과 관련된 연구로 부채와 조세관련 특성 간의 관계에 대한 연구가 있으며, 이들 연구들은 조세관련 특성 변수의 한 가지로 한계세율을 고려하였다. 기업의 자본구조와 조세 간의 관계에 대해서는 여러 연구들에서 이론화되어 기업구조와 법인세율, 비부채감세수단(nondebt tax shields), 개인소득세율 간의 관계에 대한 검증가능한 가설의 형태로 제시되어 왔다.

DeAngelo and Masulis(1980)는 조세관련 특성과 부채 간의 대체효과가 존재하며, Scholes, Wilson and Wolfson(1990)은 기업의 한계세율과 상업은행의 재무의사결정 간에 관계가 있으며, Dhaliwal, Trezevant and Wang(1992), Graham(1996b), Harwood and Manzon(2000)은 기업의 조세가 부채조달에 영향을 미치고 있다는 결론을 내리고 있다.

감세수단(interest tax shields)을 줄이기 위하여 부채를 조기에 상환하고, 기업은 최적 수준을 초과하는 레버리지를 감소시키기 위하여 부채를 조기에 상환한다. 그리고 세금이 낮은(높은) 기업은 이익(손실)을 가져오는 부채조기상환을 선택할 가능성이 높다는 것이다. Manzon(1994)의 한계세율 측정치는 Shevlin(1990)의 시뮬레이션을 사용한 한계세율 측정치보다 계산하기가 쉽다는 장점을 가지고 있다.

Graham(1996a)은 Shevlin(1990)의 연구를 확장하여, 시뮬레이션을 사용한 한계세율이 한계세율에 대한 최선의 대리변수인지 여부를 조사하였다. 시뮬레이션 절차는 연방법인세법 규정에 따라 소급공제 및 이월공제의 특성을 포착하기 위하여 18년간의 과세소득의 예측과 22년 동안(3년은 역사적, 1년은 당해 연도, 18년은 예측)의 납부세액과 관련된다. 사용된 한계세율에 대한 대리변수에는 법정한계세율, 과세소득 또는 이월결손금의 여부에 대한 부호(sign)에 근거한 더미변수, 과세소득과 이월결손금의 여부에 대한 부호에 근거한 3분변수, 이월결손금공제와 조세이연의 연도수에 근거하여 Manzon(1994)이 개발한 변수, 그리고 유효세율에 대한 측정치 등이 있다. 분석결과는 시뮬레이션을 사용하여 추정된 한계세율은 '진실한' 한계세율('true' marginal tax rate)에 대한 입수가능한 최선의 대리변수이며, 시뮬레이션을 사용한 한계세율을 입수할 수 없는 경우 계산하기 쉬운 3분변수, 법정한계세율과 과세소득 더미변수가 합리적인 대안이라는 결론을 제시하였다.

이준규(1997)는 Shevlin(1990)의 방법론을 사용하여 1989년(117개 기업)과 1990년(186개 기업)의 시뮬레이션 한계세율을 추정하고 실제 한계세율과 비교하였다. 분석결과 우리 나라 상장기업의 한계세율은 대부분(88%) 법정최고세율과 같은 것으로 나타나, 소득이 발생하고 이월결손금이 없는 기업은 법정최고세율이 한계세율의 대리변수로 사용될 수 있음을 보여주고 있다. 또한 결손금이나 이월결손금이 있는 기업의 한계세율은 평균 13%로 0에 가깝지 않다는 것을 확인하였다. 이준규(1997)의 연구에서는 시뮬레이션 한계세율과 실제한계세율 간에 통계적으로 유의한 차이가 없었으며 상관계수가 높은 것(1989년 0.82548, 1990년 0.86200)으로 나타나, 연구에서 사용된 한계세율 추정방법을

관련연구에서 사용할 수 있을 것이라는 결론을 제시하고 있다.

고종권(2002)은 Shevlin(1990)과 Graham(1996)의 연구에서 사용된 방법론을 1989년부터 1993년까지 449개 기업표본에 대해 시뮬레이션을 사용하여 추정한 한계세율이 한계세율의 대리변수로서 가장 우수한 예측치인지 여부와 시뮬레이션 한계세율을 이용할 수 없는 경우 한계세율에 대한 대리변수로 사용할 수 있는 변수가 무엇인지를 분석하였다. 분석결과 시뮬레이션 한계세율이 가장 우수한 한계세율 대리변수로 나타났으며, 시뮬레이션 한계세율을 사용할 수 없는 경우에는 법정한계세율, 3분변수와 과세소득더미변수 순으로 이용가능하며 이월결손금더미, Manzon과 유효세율변수는 적절하지 않은 대리변수로 나타났다.

한계세율의 측정에 대한 선행연구와 본 연구를 비교하면 다음과 같은 차이가 있다. 본 연구는 한계세율의 측정에 대한 선행연구에서 한계세율 대리변수를 종합·확장하고, 우리나라의 법인세법 규정을 고려하여 시뮬레이션 한계세율을 측정하였다. 그리고 시뮬레이션 한계세율 측정치를 기존연구에서 사용된 한계세율의 대리변수와 비교함으로써 시뮬레이션 한계세율이 한계세율의 대체 측정치에 비하여 합리적인 한계세율의 대리변수인지 여부를 분석하였다.

또한 분석과정에서도 본 연구는 다음과 같은 점에서 선행연구와 차이가 있다.

첫째, 본 연구에서 사용된 한계세율의 대체측정치 중 선행연구에서 사용되지 않은 4분변수(균등세율)와 Zimmerman 세율 등 유효세율 측정치를 추가적으로 분석하였다. 선행연구와 본 연구에서 사용된 한계세율 대체측정치를 요약하면 <표 2-2>와 같다.<sup>10)</sup>

둘째, 분석기간에서 이준규(1997)는 1989년과 1990년을 분석기간으로 하였고,

10) Graham(1996a, 194~195)은 Stickney and McGee(1982)가 사용한 유효세율 측정치(즉, 법인세비용을 이연조세비용으로 나눔)와 McKie-Mason(1990)의 조세소모변수(tax exhaustion variables)를 사용하였으나, 본 연구에서는 자료 입수의 불가능으로 사용하지 않았다. Stickney-McGee세율을 계산하기 위해서는 이연법인세 관련 자료가 필요하나 1998년 4월 이후 개시하는 회계연도부터 이연법인세제도를 채택하고 있어 본 연구의 분석기간 동안에는 관련 자료를 입수할 수 없으며, McKie-mason세율을 계산하기 위해서는 투자세액공제 관련 자료가 필요하나 재무제표에서 입수할 수 없다.

고종권(2002)은 1989년부터 1993년까지를 분석기간으로 하였다. 이에 비하여, 본 연구에서는 1991년부터 1996년까지 6년 동안의 한계세율을 측정하고 평가함으로써 한계세율 측정과 관련된 선행연구에 대한 실증증거를 추가하였다.

셋째, 본 연구의 실증분석에 있어 연도별 및 변동계수 집단별 분석을 수행함은 물론 한계세율의 측정에 있어서도 조세관련 변수의 내생성 문제에 대해 다양한 민감도 분석을 수행하였다.

<표 2-2> 선행연구와 본 연구에서 사용된 대리변수의 요약

구 분	Shevlin (1990)	Manzon (1994)	Graham (1996a)	이준규 (1997)	고종권 (2002)	본 연구
완전예측 한계세율	○		○	○	○	○
시뮬레이션 한계세율	○		○	○	○	○
2분 변수	법정한계세율		○		○	○
	과세소득 더미변수		○		○	○
	이월결손금 더미변수		○		○	○
3분변수			○		○	○
4분변수						○
Manzon 한계세율		○	○		○	○
유효 세율	평균세율	○	○	○	○	○
	Zimmerman세율			○		○

### Ⅲ. 연구설계

#### 1. 분석방법

본 연구에서는 선행연구에서 사용된 한계세율의 대체측정치를 검토하고 법인세법 규정을 고려한 후 재무제표 자료를 사용하여 시뮬레이션 한계세율을 측정하였다. 그리고 측정된 시뮬레이션 한계세율 측정치를 선행연구에서 사용

된 한계세율 대리변수와 비교함으로써, 시뮬레이션 한계세율이 한계세율의 대체측정치에 비하여 합리적인 한계세율의 대리변수인지 여부를 분석한다.

분석모형인 한계세율 대리변수의 예측능력을 분석하기 위한 모형은 사전에 완전예측 한계세율(이월결손금의 공제가능기간을 고려하여 향후 5년 동안의 과세소득을 알고 있는 경우의 한계세율)을 계산하고 각각의 한계세율 대리변수들이 완전예측 한계세율을 얼마나 잘 예측하는지 여부를 측정하기 위하여 한계세율 대리변수를 완전예측 한계세율에 회귀시킴으로써 각 대리변수의 완전예측 한계세율에 대한 설명력을 평가한다.

$$MTR01_{it} = \alpha + \beta MTR_{it} + \epsilon_{it} \quad (3-1)$$

여기서,  $MTR01_{it}$ 는 t연도 i기업의 완전예측 한계세율을,  $MTR_{it}$ 는 t연도 i기업의 한계세율 측정치( $MTR02 \sim MTR10$ )를,  $\alpha$ 는 상수를,  $\beta$ 는 회귀계수를,  $\epsilon_{it}$ 는 오차항을 의미한다.

또한 위와 같은 분석방법에 대한 민감도분석으로, 잔차의 정규성 여부에 대한 분석과 설명변수의 독립성 여부에 대한 분석 및 한계세율과 같은 기업의 조세관련 특성이 내생적일 수 있는지 여부에 대한 분석을 수행하였다.

## 2. 변수의 조작적 정의

본 연구의 한계세율을 추정하기 위한 실증분석에서는 다음과 같은 한계세율 측정치를 사용하였다.

### 가. 완전예측 한계세율, 시뮬레이션 한계세율과 Manzon 한계세율

한계세율은 앞 장에서와 같은 이론적인 정의에도 불구하고, 이월결손금, 투자세액공제와 최저한세와 같은 한계세율의 계산과 관련된 요인을 모두 반영할 수 없기 때문에 한계세율을 정확하게 계산하는 것은 어렵다 할 것이다. 그러

나 이러한 어려움을 전제로 다음과 같은 완전예측 한계세율을 정의할 수 있다.

완전예측 한계세율(perfect foresight marginal tax rates)은 기업과 관련된 이용가능한 자료를 사용하여 사후적으로 계산한 한계세율을 말하며, 한계세율에 대한 대리변수의 유용성을 판단하는 기준으로 사용한다. 본 연구에서는 완전예측 한계세율을 5년 동안의 이월결손금의 이월공제를 고려하여 사후적으로 계산한 한계세율로 정의한다.

시뮬레이션을 사용하여 추정한 한계세율(simulated marginal tax rates, 아래에서는 시뮬레이션 한계세율이라 함)은 Shevlin(1990)과 Graham (1996a, b)이 사용하였던 방법을 사용하여 측정하였다. 시뮬레이션 한계세율을 추정하기 위해서는 장래 사업연도의 과세소득에 대한 추정치와 당기 결손금의 이월공제 여부에 대한 자료가 필요하다. 즉, 특정 연도에 결손금이 발생하는 경우, 향후 5년간 결손금의 이월공제가 가능하므로, 한계세율을 추정하기 위해서는 당기 이후 5년 동안의 미래 과세소득을 예측하여야 한다.

시뮬레이션 한계세율을 추정하기 위해서는 기업의 과거 과세소득 시계열자료가 추세항이 있는 랜덤워크모형(a random walk with drift model)을 따른다고 가정하고, 기업의 미래 5년간 과세소득(또는 결손)을 시뮬레이션을 통하여 예측함으로써 계산한다. 추세항이 있는 랜덤워크모형은 Shevlin (1990), Graham(1996a, b), 이준규(1997), 고종권(2002) 등 시뮬레이션을 사용하여 한계세율을 추정한 선행연구에서 공통적으로 사용하였다.

본 연구에서는 과세소득이 다음과 같은 추세항이 있는 랜덤워크모형을 따른다고 가정하고 있다.

$$TI_{jt} = \delta_j + TI_{jt-1} + \epsilon_{jt} \quad \text{또는} \quad \Delta TI_{jt} = \delta_j + \epsilon_{jt} \quad (3-2)$$

여기서  $TI$ 는 과세소득(즉, 세전이익)을,  $\Delta TI$ 는 과세소득의 변동(즉  $TI_t - TI_{t-1}$ )을,  $\delta_j$ 는 추세항(개별 기업 과거 시계열 자료를 기초로 하여 계산한 세전순이익 변동 $\Delta TI$ 의 평균)을,  $\epsilon_{jt}$ 는 오차항(평균이 0이고 분산이  $\sigma_j^2(\Delta TI)$ 이며, 정규분포)을,  $j$ 는 표본 기업을,  $t$ 는 사업연도를 의미한다.

한계세율을 추정하기 위해서는 기업의 과세소득 자료가 필요하다. 그러나

개별 기업의 법인세신고서 자료는 기밀로 처리되기 때문에 입수할 수 없다. 따라서 과세소득자료는 KIS-FAS의 세전순이익을 과세소득자료로 활용하였으며, 추세항( $T_0$ )은 개별 기업의 과거 시계열자료를 기초로 하여 계산한 세전순이익 변동( $\Delta TI$ )의 평균으로 계산하였다. 또한 세무상 이월결손금은 재무제표에서 파악할 수 없으므로, 이익잉여금처분계산서의 전기이월잉여금이 음인 경우를 이월결손금이 있는 경우로 간주하였다.

과세소득과 이월결손금 자료를 기초로 시뮬레이션 한계세율의 추정과정을 요약하면 다음과 같다. (1) 과거 10년간 및 한계세율을 추정하는 연도의 실제 세전순이익과 위의 모형(식 3-4)에 의하여 생성한 미래 5년간의 세전순이익을 기초로 각 연도의 법인세를 계산한다. (2) 한계세율을 추정하는 사업연도의 세전순이익에 1원을 가산하여 위의 방법으로 납부세액을 계산한다. (3) '(1)'과 '(2)' 방법에 의해 계산된 법인세 차이의 현재가치를 기초로 한계세율을 계산한다. (4) 위와 같은 과정을 50회 반복하여 결과를 계산한 후 평균한다.

Manzon(1994)의 한계세율 추정치는 이월결손금이 있는 기업의 경우, 과세소득과 상계하기 위하여 이월결손금을 사용할 수 있는 기간[식 (3-3)의  $n$ ]을 추정하여 한계세율을 계산하였다.

기업의 한계세율은 당기에 가득한 과세소득의 추가금액에 대한 법인세의 현재가와 같으며 다음과 같이 계산된다.

$$MTR = (\$1 \times tr) / (1+r)^n \quad (3-3)$$

여기서, MTR은 한계세율을,  $tr$ 은 법인세가 납부되는 연도의 구간별 법정세율을,  $r$ 은 할인율을,  $n$ 은 법인세가 납부되는 연도를 의미한다.

식 (3-3)의  $n$ 은 기업이 과세소득과 상계하기 위하여 이월결손금을 사용할 수 있는 기간의 수를 말하며, 이월결손금을 예상평균미래연간이익(EFAI, expected average future annual income)으로 나누어 추정한다.<sup>11)</sup>

11) 시장가치는 미래이익을 추정하기 위하여 사용되었는데, 왜냐하면 이것이 미래이익을 예측하는 데 유용한 것으로 증명되었기 때문이다. 특정 기업의 자기자본의 시장가치는 사외유통 보통주 수에 회계연도 말의 주가를 곱하여 측정한다(Beaver, Lambert and Morse, 1980).

$$n = \text{NOL}_{t-1} / \text{EFAI}_{t-1} \quad (3-4)$$

여기서,  $\text{NOL}_{t-1}$ 는 과세소득과 상계하기 위하여 사용할 수 있는 t-1기의 이월결손금을,  $\text{EFAI}_{t-1}$ 는 t-1기의 시장가치에 할인율을 곱한 금액을 의미한다.

식 (3-4)에서 계산된 n의 추정치, 할인율(r)과 세율(tr)을 식 (3-3)에 대입하면, Manzon의 한계세율 추정치가 산출된다.<sup>12)</sup> 이월결손금을 사용할 수 있는 기간(n)이 짧을수록 한계세율은 높을 것이다.

이월결손금이 없는 기업의 경우, 한계세율은 법정세율을 적용(즉, W1에 당해 연도의 법정세율을 곱한 것과 같다고 가정)한다.

#### 나. 한계세율에 대한 더미변수

본 연구에서는 위에서 살펴본 완전예측 한계세율, 시뮬레이션 한계세율과 Manzon의 한계세율 측정치 이외에 다음과 같은 더미변수를 한계세율에 대한 대리변수로 고려하였다.

법정한계세율(statutory tax rates)은 이월결손금을 상계한 후 당기 과세소득에 대해 소득구간별로 법정세율을 적용하여 계산한다. 과세소득이 음인 경우에는 0으로 계산하였다.

과세소득 더미변수(taxable income dummy)는 과세소득이 양이면 최고법정세율을 적용하고, 그 밖의 경우에는 0을 적용한다. 과세소득 더미변수는 양의 과세소득이 발생한 기업은 모두 최고세율을 적용하기 때문에 법정세율과는 차이가 있다.

이월결손금 더미변수(non NOL dummy)는 이월결손금이 없으면 최고법정세율을 적용하고, 그 밖의 경우에는 0을 적용한다.

3분변수(trichotomous variables)는 (1) 과세소득이 양이고 이월결손금이 없

12) 추가소득에 대한 법인세가 이월결손금이 사용되는 시점에 정확하게 납부된다고 가정하였다. 만일 n의 추정치가 5(과세소득을 상계하기 위하여 이월결손금이 이월될 수 있는 최대 연도 수)년보다 크다면, 한계세율은 0으로 설정된다.

으면 최고법정세율, (2) 과세소득이 음이고 이월결손금이 없거나 과세소득이 양이고 이월결손금이 있는 경우에는 최고법정세율의 50%, (3) 과세소득이 음이고 이월결손금이 있으면 0을 적용한다. 만일, 이월결손금 자료를 입수할 수 있다면 이월결손금의 발생 여부에 기초한 변수는 과세소득의 발생 여부에 기초한 변수보다 우수할 것이다.

4분변수 또는 균등세율(uniform tax rate)은 과세소득과 이월결손금의 존재 여부의 조합에 근거하여 기업에 법정세율 중 한 가지를 부여하였다. 사분변수는 (1) 기업이 과세소득이 없고 이월결손금이 있으면 0, (2) 기업이 과세소득이 없고 이월결손금이 없으면 법정세율의 1/3, (3) 기업이 과세소득이 양이고 이월결손금이 있으면 법정세율의 2/3, (4) 기업이 과세소득이 양이고 이월결손금이 없으면 법정세율과 같다.

#### 다. 유효세율 측정치

한계세율을 추정할 선행연구에서는 한계세율에 대한 추정치로 유효세율(ETR, effective tax rates)을 사용하였다. 평균세율(average tax rate)은 법인세를 과세소득(즉 세전이익)으로 나누어 정의하였으며, 과세소득 또는 법인세가 음인 경우에는 유효세율을 0으로 설정하였다. 평균세율은 유효세율에 대한 선행연구인 Porcano(1986), Wang(1991), 노현섭·정은주(2001) 등의 연구에서 사용하였다.

Zimmerman세율(Zimmerman tax rate)은 법인세를 매출총이익(즉 매출액에서 매출원가를 차감함)으로 나누어 정의하였으며, 매출총이익 또는 법인세가 음인 경우에는 유효세율을 0으로 설정하였다. Zimmerman세율은 유효세율에 대한 선행연구인 Zimmerman(1983), Porcano(1986), Wang(1991), 노현섭·정은주(2001) 등의 연구에서 사용하였다.

본 연구에서 한계세율의 추정과 관련하여 사용된 변수에 대한 정의와 계산식을 요약하면 <표 3-1>과 같다.

<표 3-1> 한계세율 대체측정치 요약

변 수	한계세율 측정치
완전예측 한계세율	5년 동안의 결손금 이월공제를 고려하여 사후적으로 계산한 한계세율을 말함
시뮬레이션 한계세율	Shevlin(1990)이 사용한 시뮬레이션을 사용하여 추정된 한계세율을 말함
법정세율	이월결손금을 상계한 후 당기 과세소득에 대해 소득구간별로 법정세율을 적용하여 계산함
과세소득 더미변수	과세소득이 있으면 최고법정세율을 적용하고, 그 밖의 경우에는 0을 적용함
이월결손금 더미변수	이월결손금이 없으면 최고법정세율을 적용하고, 그 밖의 경우에는 0을 적용함
3분변수	과세소득이 양이고 이월결손금이 없으면 최고법정세율을, 과세소득이 음이고 이월결손금이 없거나 과세소득이 양이고 이월결손금이 있는 경우에는 최고법정세율의 1/2을, 과세소득이 음이고 이월결손금이 있으면 0을 적용함
4분변수	기업이 세전이익이 없고 이월결손금이 있으면 0을, 기업이 세전이익이 없고 이월결손금이 없으면 법정세율의 1/3을, 기업이 세전이익이 양이고 이월결손금이 있으면 법정세율의 2/3를, 기업이 세전이익이 양이고 이월결손금이 없으면 법정세율을 적용함
Manzon 한계세율	이월결손금이 있는 기업은 '식 (3-3)'을 사용하여 측정하고, 이월결손금이 없는 기업은 최고법정세율을 적용함
평균세율	법인세를 과세소득으로 나누어 계산함(법인세 또는 과세소득 음인 경우 유효세율은 0을 부여함)
Zimmerman 세율	법인세를 매출총이익으로 나누어 계산함(법인세 또는 매출총이익이 음인 경우 유효세율은 0을 부여함)

한계세율을 추정하기 위해서는 기업의 과세소득 자료가 필요하다. 그러나 개별 기업의 법인세 신고자료(즉 과세소득 또는 결손금과 관련된 세무조정자료)는 기밀로 처리되기 때문에 입수할 수 없다. 따라서 KIS-FAS의 세전순이익을 과세소득 자료로 활용하였다. 또한 세무상 이월결손금은 재무제표에서 파악할 수 없으므로, 이익잉여금처분계산서의 전기이월잉여금이 음인 경우를 이월결손금이 있는 경우로 간주하였다.

<표 3-2>는 <표 3-1>의 한계세율 측정치를 추정하는 데 필요한 자료의 정의를 제시하고 있다.

<표 3-2> 한계세율 관련변수의 정의

구분	변수		정의 및 계산식
완전예측 한계세율과 시뮬레이션 한계세율	TI	과세소득	당기순이익
	$\bar{t}_i$	추세항	개별 기업의 과거시계열자료를 기초로 하여 계산한 세전순이익 변동( $\Delta$ TI)의 평균으로 계산함
	NOL	이월결손금	전기이월잉여금이 음인 경우를 이월결손금이 있는 경우로 간주함
Manzon의 한계세율	MTR	한계세율	$(\bar{W}1 \times tr) / (1+r)^n$
	tr	법정 법인세율	
	r	할인률	3년 만기 회사채 월별수익률의 연도별 평균을 적용함
	n	기업이 과세소득과 상계하기 위하여 이월결손금을 사용할 수 있는 기간 수	$NOL_{t-1} / EFAI_{t-1}$
	$NOL_{t-1}$	과세소득과 상계하기 위하여 t-1 기간에 사용할 수 있는 이월결손금	전기이월잉여금이 음인 경우를 이월결손금이 있는 경우로 간주함
	$EFAI_{t-1}$	예상평균 미래연간이익	· 자기자본의 시장가치 × 기간 t-1의 할인율 · 자기자본의 시장가치 = 사외유통 보통주 수 × 회계연도 말의 주가
유효세율	평균세율		CTE / PTI
	Zimmerman 세율		CTE / GROSSIN
	CTE		법인세
	PTI		세전순이익
	GROSSIN		매출총이익

1. 완전예측 한계세율과 시뮬레이션 한계세율을 계산하는 방법은 동일하나 완전예측 한계세율은 실제 과세소득을 사용하나 시뮬레이션 한계세율은 미래의 과세소득을 추정한다는 점에서 차이가 남.

2. tr(법정법인세율)은 각 과세소득에 적용될 총법인세율(법인세+방위세 또는 농어촌특별세+주민세)을 적용하였음. 법인세율(최저/최고법정세율)은 1980년은 25.5/ 38.25%, 1981년~1982년은 28.05/42.075, 1983년~1990년은 25.5/38.75%, 1991년~1993년은 21.5/36.55%, 1994년은 19.35/34.4%, 1995년은 19.71/32.25%, 1996년~2001년은 17.6/30.8%임.

### 3. 분석자료

본 연구의 실증분석에서 사용된 표본기업은 한국신용평가정보(주)의 KIS-FAS<sup>13)</sup>에 수록된 기업 중 다음과 같은 선정기준을 충족하는 기업을 대상으로 선정하였다.

첫째, 1980년부터 2001년까지 계속적으로 상장상태를 유지한 기업. 분석기간을 20년 이상의 장기간으로 설정한 이유는 시뮬레이션 한계세율을 추정하기 위해서는 추정연도를 전후한 17년간의 자료가 필요하며, 한 연도의 한계세율 측정치 분석이 아닌 최소한 5년 이상의 한계세율 측정치를 분석하기 위해서는 21년의 자료를 분석하여야 하기 때문이다.<sup>14)</sup>

- 
- 13) 한국신용평가정보(주)는 우리나라 최초의 신용평가기관으로 1980년 이후 상장기업의 재무제표 자료에 대한 데이터베이스인 KIS-FAS를 개발·판매하고 있다. KIS-FAS(Financial Analysis System)는 재무제표(대차대조표, 손익계산서, 이익잉여금계산서, 제조원가명세서, 현금흐름표) 자료를 검색·출력하고 사용자가 정의한 비율 등을 계산하여 출력하는 프로그램을 제공하고 있다. KIS-FAS는 '법인세과세표준 및 세액신고서' 등 세무조정 자료가 기밀로 처리되고 있어 개별기업의 세무조정 자료를 입수·분석할 수 없는 현실에서 전체 상장기업의 기업재무자료를 사용하여 분석할 수 있는 유일한 자료원이라 할 수 있다. KIS-FAS는 개별기업의 자료이며, 국세통계연보의 자료는 집계된 자료(aggregate statistics)이며, 산업분류, 중소기업의 분류 등에서 서로 다른 기준을 사용하고 있어 직접 비교할 수 없으나 다음과 같은 차이가 있다 할 것이다.
- 첫째, 산업별 분류는 본 연구에서 사용한 표본기업은 산업별로 고르게 분포되어 있으나, 음·식료품 제조기업이 10.06%를, 화학물 및 화학제품 제조업이 20.11%를, 종합건설업이 10.61%를 차지하고 있어 10% 이상의 구성비율을 보여주고 있다. 또한, 비금속광물 제조업, 제1차 금속산업, 전자부품, 영상, 음향 및 통신장비제조업과 도매 및 상품중개업이 5%이상 10% 미만의 구성비를 보여주고 있다.
- 이에 비하여 국세통계연보(2003)에서 분석한 자료는 업태별로는 제조(26.2%), 도매(20.8%), 건설(19.3%), 서비스(16.7%) 순으로 분포되어 있다.
- 둘째, KIS-FAS는 전체 상장기업의 데이터베이스이나 국세통계연보의 자료는 상장 및 비상장기업의 자료를 모두 포함하고 있다.
- 셋째, 국세통계연보 자료는 317,154개 기업(주식회사가 전체의 96.1%)이고, 외형이 5억원 미만인 영세기업이 전체의 55.7%이며 100억원 이상의 대법인은 4.2%이다. 이에 비하여 KIS-FAS 자료는 중소기업 이외의 기업이 대부분이므로, 일반적으로 회계학을 포함하는 경영관련 연구에서는 KIS-FAS자료를 사용하여 분석할 때 중소기업과 대기업으로 구분하여 분석하는 실익이 없는 것으로 판단된다.
- 14) 시뮬레이션을 사용하여 특정 연도의 한계세율을 추정하기 위해서는 한계세율 추정연도를 중심으로, 과세소득(즉 세전순이익)을 계산하기 위한 추정연도 이전 과거 11년간 자료와 장래 과세소득 예측치를 계산하기 위한 추정연도 이후 5년간의 자료(결손금의 이월공제기간) 등 총 17년간의 자료가 필요하다.

둘째, 금융업에 속하지 않는 기업. 금융업에 속하는 기업의 재무제표 양식이나 내용은 제조업을 중심으로 하는 비금융기업의 재무제표 양식이나 내용과 다르기 때문이다.

셋째, 회계연도가 12월말로 종료하는 기업. 회계연도가 12월말인 기업으로 표본을 한정하는 것은 상이한 법인세율의 적용으로 인한 분석상의 잡음(noisy)을 피하고, 표본의 동질성을 높이기 위한 기준이다.

위와 같은 표본선정 기준을 적용한 결과 분석대상 기간인 1991년부터 1996년까지 6년 동안 각 연도별로 사용할 수 있는 표본기업의 수는 179개 기업으로 선정되었다.

## IV. 분석결과 및 해석

### 1. 기술통계분석

<표 4-1>은 완전예측 한계세율, 시뮬레이션 한계세율과 Manzon 한계세율 등 대표적인 한계세율 측정치, 법정한계세율, 과세소득 더미변수, 이월결손금 더미변수, 삼분변수와 4분변수 등의 더미변수와 평균세율과 Zimmerman 세율 등의 유효세율 측정치에 대한 기술통계량을 제시하고 있다.

<표 4-1> 한계세율 대리변수의 기술통계

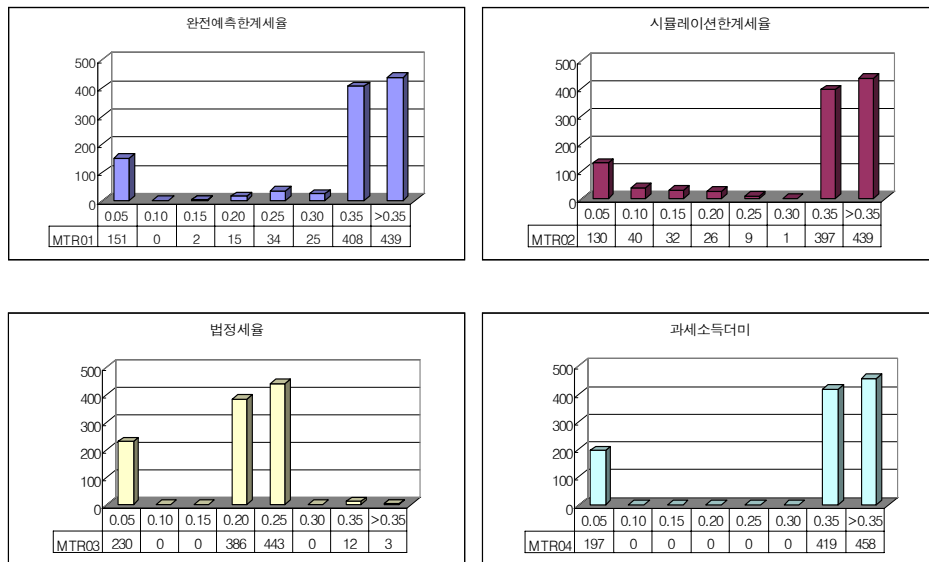
변 수	평균값	표준편차	Q1	중앙값	Q3
완전예측 한계세율	0.2893	0.1228	0.3080	0.3440	0.3655
시뮬레이션 한계세율	0.2838	0.1238	0.3080	0.3440	0.3655
법정한계세율	0.1610	0.0865	0.1760	0.1935	0.2150
과세소득 더미변수	0.2830	0.1357	0.3080	0.3440	0.3655
이월결손금 더미변수	0.3101	0.1065	0.3080	0.3440	0.3655
3분변수	0.2965	0.0993	0.3080	0.3440	0.3655
4분변수(균등세율)	0.2920	0.1077	0.3080	0.3440	0.3655
Manzon 한계세율	0.3277	0.0743	0.3225	0.3440	0.3655
평균세율	0.2940	0.2282	0.1372	0.2980	0.4168
Zimmerman 세율	0.0618	0.0925	0.0134	0.0371	0.0759

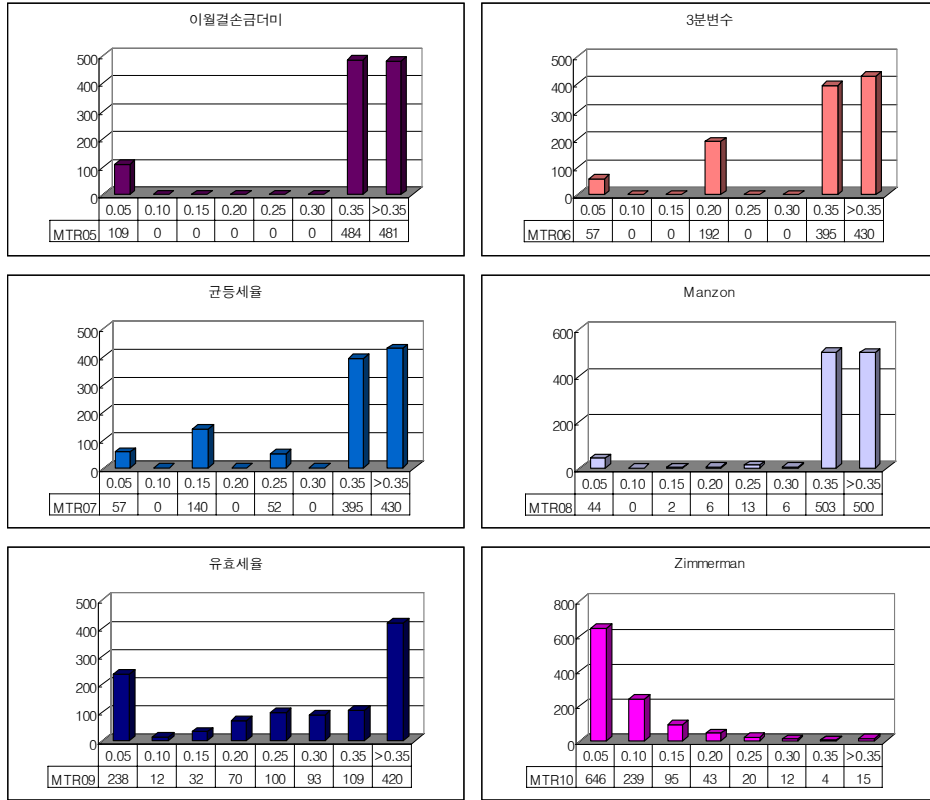
1. 관찰수는 1,074기업-연도로, 최종 표본기업의 수 179개를 한계세율 측정기간인 6년(1991년~1996년) 동안 합계한 것임.

본 연구에서는 1991년부터 1996년까지 6년 동안 한계세율을 측정하고 분석하였다. 한계세율 측정치별로 차이가 있으나, 추정된 한계세율은 완전예측 한계세율은 평균 0.2893 표준편차 0.1228이고, 시뮬레이션 한계세율은 평균 0.2838 표준편차 0.1238이며, Manzon 한계세율은 평균 0.3277 표준편차 0.0743으로 나타나고 있다. 추정된 대체적인 한계세율 측정치들은 완전예측 한계세율과 유사한 양상을 보여주고 있으나 법정한계세율(평균 0.1610)과 Zimmerman 세율(평균 0.0618)은 다른 한계세율 측정치와 차이가 비교적 크게 나타나고 있다.

본 절에서 분석하고 있는 완전예측 한계세율을 포함하는 10가지 한계세율 대리변수 값의 분포를 0.05 단위의 그림으로 표시한 결과가 [그림 4-1]에 제시되어 있다. 분석결과는 <표 4-1>과 같이 법정한계세율과 Zimmerman 세율을 제외한 한계세율 측정치들이 완전예측 한계세율과 유사한 모습을 보여주고 있다.

[그림 4-1] 한계세율 대리변수의 분포





나. 상관관계분석

<표 4-2>는 위에서 살펴본 한계세율 추정치를 대상으로, 대체적인 한계세율 추정치간의 상관관계를 분석하였다. 한계세율의 대체추정치별로 차이가 있으나, 완전예측 한계세율과 한계세율의 대체추정치 간의 상관계수는 시뮬레이션 한계세율과 가장 높은 상관관계(0.8923)를 보여주고 있으며, 다음으로 법정 한계세율과 0.8687, 4분변수와 0.8589, 3분변수와 0.8430, 과세소득 더미변수와 0.8111의 순으로 높은 상관관계를 갖는 것으로 나타났다. 반면에 이월결손금 더미변수는 0.5391, Manzon 한계세율은 0.5234, 평균세율은 0.4955, Zimmerman 세율은 0.1832의 상관관계를 갖는 것으로 나타나 다른 한계세율 추정치보다 다소 낮은 상관관계를 보여주고 있다.

<표 4-2> 한계세율 대리변수간의 상관관계

변수	완전예측 한계세율	시뮬레이션 한계세율	법정 한계세율	과세소득 더미변수	이월결손금 더미변수	3분변수	4분변수	Manzon 한계세율	평균세율	Zimmerman 세율
완전예측 한계세율										
시뮬레이션 한계세율	0.8923									
법정 한계세율	0.8687	0.9448								
과세소득 더미변수	0.8111	0.9189	0.8958							
이월결손금 더미변수	0.5391	0.5047	0.5142	0.3361						
3분변수	0.8430	0.8982	0.8875	0.8632	0.7656					
4분변수 (균등세율)	0.8589	0.9381	0.9218	0.9506	0.6118	0.9773				
Manzon 한계세율	0.5234	0.4835	0.4905	0.2995	0.7349	0.5986	0.4938			
평균세율	0.4955	0.5464	0.5307	0.6120	0.1896	0.5196	0.5764	0.1744		
Zimmerman 세율	0.1832	0.1893	0.1935	0.1889	0.0549	0.1584	0.1767	0.0884	0.2305	

1. 음영으로 표시된 칸은 10% 수준에서, 나머지 칸은 모두 1% 이하 수준에서 유의함 (음영으로 표시된 칸을 제외한 모든 상관계수들의 p-value는 0.0001 미만임).

완전예측 한계세율과 대체적인 한계세율 측정치 간의 상관관계 분석결과는 완전예측 한계세율과 상관계수가 높은 대체적인 한계세율 측정치가 완전예측 한계세율을 예측하는 데 우수한 한계세율 측정치라는 것을 의미한다. 상관관계 분석결과는 시뮬레이션 한계세율이 완전예측 한계세율을 예측하는 데 가장 우수한 한계세율 측정치이며, 법정한계세율, 4분변수, 3분변수, 과세소득 더미변수가 한계세율에 대한 이용 가능한 대안이 될 수 있다는 것을 알 수 있다.

한계세율의 대체측정치 간의 상관관계는 Graham(1996a)과 고종권(2002)의 연구와 유사한 분석결과를 보여주고 있다. 그러나 본 연구의 한계세율 측정치 간의 상관관계 분석결과, 4분변수가 시뮬레이션 한계세율, 법정세율 다음의 상관관계를 보여주고 있다는 데 차이가 있으며, Graham(1996a)의 연구와는 3분변수가 법정세율보다 상관계수의 크기가 크고 과세소득 더미변수와 상관계수의 크기 순위가 바뀌었다는 데 차이가 있다.<sup>15)</sup>

## 2. 한계세율 대리변수의 예측능력 분석

본 절에서는 한계세율 대리변수들이 완전예측 한계세율을 어느 정도 정확하게 예측할 수 있는지 여부를 분석함으로써 한계세율 대리변수들의 우수성을 판단한다. 따라서 본 연구에서 시물레이션 한계세율과 Manzon 한계세율 등의 한계세율 측정치, 법정한계세율, 과세소득 더미변수, 이월결손금 더미변수, 3분변수와 4분변수(균등세율) 등의 더미변수와 평균세율과 Zimmerman 세율 등의 유효세율 측정치로 측정하고 있는 한계세율 대리변수가 완전예측 한계세율을 어느 정도 정확하게 예측하는지 여부를 분석한다.

<표 4-3>은 각각의 한계세율 대리변수들이 미래의 조세관련 특성(즉, 완전예측 한계세율)을 예측하는 능력을 분석하기 위하여, 각각의 한계세율 대리변수 측정치를 설명변수로 하고 완전예측 한계세율을 종속변수로 하는 회귀분석을 수행하였다.<sup>16)</sup>

한계세율 대리변수를 사용한 회귀분석의 경우 모형의 설명력(즉 수정  $R^2$ )을 비교해 보면, 시물레이션 한계세율의 결정계수가 0.7960으로 가장 높고, 법정한

15) Graham(1996a)의 연구에서 완전예측 한계세율 대체적인 한계세율 측정치들과의 상관관계는 시물레이션 한계세율과 0.876, 3분변수와 0.691, 법정세율과 0.660, 과세소득 더미변수와 0.653, 이월결손금 더미변수와 0.566, Manzon 한계세율과 0.507, 평균세율과 0.414의 상관계수를 보여주고 있다.

고종권(2002)의 연구에서 완전예측 한계세율과의 대체적인 한계세율 측정치들의 상관관계는 시물레이션 한계세율과 0.903, 법정세율과 0.890, 3분변수와 0.853, 과세소득 더미변수와 0.813, 이월결손금 더미변수와 0.533, Manzon 한계세율과 0.516, 평균세율과 0.412의 상관계수를 보여주고 있다.

16) 한계세율의 대리변수가 완전예측 한계세율을 정확하게 예측한다면, 단일변수를 사용하여 추정된 회귀분석에서 추정된 절편과 기울기가 각각 0과 1의 값을 가져야 할 것이다. 그러나, 회귀분석 결과는 시물레이션 한계세율(MTR02), 4분변수(MTR07)와 Manzon 한계세율(MTR08)의 절편과 기울기가 0과 1에 근접한 값으로 나타나고 있으나, 대부분의 경우 절편과 기울기가 0과 1이라는 이상적인 값과는 통계적으로 다른 값을 보여주고 있다.

이러한 절편과 기울기에 대한 분석결과는 Graham(1996a), 고종권(2002)과 유사한 분석결과를 보여주고 있다. 본 연구의 추가적인 공헌도는 4분변수가 추가적으로 절편과 기울기가 0과 1에 근접한 값으로 나타나고 있다는 것이다.

계세율 0.7545, 4분변수 0.7374, 3분변수 0.7103, 과세소득 더미변수 0.6576 순으로 높은 설명력을 보여주고 있다. 이에 비하여 이월결손금 더미변수의 결정계수는 0.2899, Manazon 한계세율은 0.2733, 평균세율은 0.2433, Zimmerman 세율은 0.0327로 낮은 결정계수 값을 보여주고 있다.

이러한 한계세율 대리변수의 설명력에 대한 분석결과는 Graham(1996a)과 고종권(2002)의 연구와 유사한 분석결과를 보여주고 있으나, Graham(1996a)의 연구보다 한계세율 대리변수의 설명력이 높은 것으로 나타나고 있으며, 고종권(2002)의 연구보다는 한계세율 대리변수의 설명력이 낮은 대리변수도 있고 높은 대리변수도 있는 것으로 나타나고 있다. 그러나 본 연구의 분석결과, 4분변수가 시뮬레이션 한계세율, 법정세율 다음으로 높은 설명력을 보여주고 있는데 차이가 있으며, Graham(1996a)의 연구와는 3분변수가 법정세율보다 설명력의 크기가 크다는 데 차이가 있다.<sup>17)</sup>

17) Graham(1996a)의 연구에서 단일변수 회귀분석에 있어 한계세율 대리변수의 설명력에 대한 분석결과는 시뮬레이션 한계세율과 0.767, 3분변수와 0.478, 법정세율과 0.435, 과세소득 더미변수와 0.426, 이월결손금 더미변수와 0.320의 결정계수를 보여주고 있어, 대체적으로 본 연구의 분석결과보다 모형의 설명력이 낮게 나타나고 있으며 시뮬레이션 한계세율과 다른 한계세율 대리변수 간의 결정계수가 뚜렷한 차이를 보여주고 있다.

고종권(2002)의 연구에서 단일변수 회귀분석의 한계세율 대리변수의 예측능력은 시뮬레이션 한계세율(고종권은 추정한계세율이라 함)의 결정계수는 0.816, 법정세율은 0.804, 3분변수는 0.728, 과세소득 더미변수는 0.665, 이월결손금 더미변수는 0.285, Manzon 한계세율은 0.266, 평균세율(고종권은 유효세율이라 함)과 0.169의 결정계수를 보여주고 있다.

&lt;표 4-3&gt; 한계세율 대리변수의 완전예측 한계세율에 대한 예측능력

대리변수		$\alpha$ (t값)	$\beta$ (t값)	F값	수정 R <sup>2</sup>
시뮬레이션 한계세율	MTR02	0.0381 (9.00)***	0.8852 (64.72)***	4188.82 ***	0.7960
법정한계세율	MTR03	0.0907 (23.12)***	1.2332 (57.43)***	3298.00 ***	0.7545
과세소득 더미변수	MTR04	0.0816 (16.08)***	0.7342 (45.40)***	2061.48 ***	0.6576
이월결손금 더미변수	MTR05	0.0966 (9.93)***	0.6217 (20.95)***	439.10 ***	0.2899
3분변수	MTR06	-0.0197 (-3.11)***	1.0424 (51.31)***	2632.35 ***	0.7103
4분변수(균등세율)	MTR07	0.0034 (0.60)	0.9794 (54.90)***	3014.05 ***	0.7374
Manzon 한계세율	MTR08	0.0058 (0.40)	0.8653 (20.11)***	404.56 ***	0.2733
평균세율	MTR09	0.2109 (39.69)***	0.2667 (18.68)***	348.92 ***	0.2449
Zimmerman 세율	MTR10	0.2743 (61.86)***	0.2432 (6.10)***	37.22 ***	0.0327

1. 연구모형은 다음과 같음.

$$MTR01_{it} = \alpha + \beta MTR_{it} + \epsilon_{it}$$

여기서,  $MTR01_{it}$ 는 t연도 i기업의 완전예측 한계세율,  $MTR_{it}$ 는 t연도 i기업의 한계세율 추정치(MTR02~MTR10),  $\epsilon_{it}$ 는 오차항을 의미함.

2. \*는 0.1, \*\*는 0.05, \*\*\*는 0.01 수준에서 유의하다는 것을 나타냄.

이러한 분석결과를 종합해 보면, 시뮬레이션 한계세율이 완전예측 한계세율을 예측하는 데 가장 우수한(즉, 설명력이 큰) 한계세율 추정치라는 것을 알 수 있다. 그리고 시뮬레이션 한계세율을 추정하기 어려운 경우에는 법정한계세율, 4분변수, 3분변수, 과세소득 더미변수가 한계세율에 대한 대리변수로 이용 가능한 대안이 될 수 있다는 것을 알 수 있다.

또한 본 연구에서 추가적으로 고려한 한계세율에 대한 대리변수 중 4분변수(균등세율)가 선행연구에서 사용되어 온 한계세율에 대한 대리변수 중 시뮬레이션 한계세율과 법정한계세율 다음의 설명력을 제시해 주고 있어, 3분변수와 과세소득 더미변수보다 더 우수한 한계세율 대리변수인 것으로 나타나고 있어 본 연구의 추가적인 공헌도를 제시해 주고 있다 할 것이다.

### 3. 민감도분석

아래에서는 앞 절의 분석결과에 대한 민감도분석으로, 잔차의 정규성 여부에 대한 분석과 설명변수의 독립성 여부에 대한 분석 및 한계세율과 같은 기업의 조세관련 특성이 내생적일 수 있는지 여부에 대한 분석을 수행하였다.

#### 가. 변동계수에 따른 기업군 분석

이분산성(heteroskedasticity) 여부와 관련하여 잔차는 특정 기업의 평균과 과세소득의 변동성(volatility)에 따라 변동할 것이다. 따라서 한계세율의 계산에 사용하였던 과세소득의 변화분을 사용하여 변동계수(과세소득 변화의 표준편차, 즉 변동성을 평균으로 나누어 계산함)를 기준으로 동질적인 5개 집단(portfolio)으로 구분하여, 각 집단별로 분석하는 경우와 전체 표본에 대해 분석한 경우를 비교하여 결과가 달라지는지 여부를 분석하였다.

<표 4-4> 과세소득의 변동계수에 따른 집단별 예측능력 분석<sup>18)</sup>

집단	변 수	$\beta_1$ (t값)	$\beta_2$ (t값)	F	수정 R <sup>2</sup>
1	시뮬레이션 한계세율	0.0496 (6.88)***	0.8568 (39.08)***	1527.51 ***	0.8786
	법정한계세율	0.0845 (9.52)***	1.2542 (27.92)***	779.31 ***	0.7867
	과세소득 더미변수	0.0620 (6.19)***	0.8118 (26.80)***	718.28 ***	0.7727
	이월결손금 더미변수	0.0008 (0.03)	0.9419 (11.08)***	122.69 ***	0.3658
	3분변수	-0.0781 (-5.92)***	1.2160 (30.68)***	941.42 ***	0.8167
	4분변수(균등세율)	-0.0315 (-2.81)***	1.0846 (32.11)***	1030.91 ***	0.8300
	Manzon 한계세율	-0.0319 (-0.93)	1.0333 (10.29)***	105.89 ***	0.3320
	평균세율	0.2302 (20.33)***	0.2873 (8.85)***	78.34 ***	0.2682
	Zimmerman 세율	0.3124 (36.78)***	0.0563(0.88)* **	0.77	-0.0011

1. 연구모형은 다음과 같음.

$$MTR01_{it} = \alpha + \beta_1 MTR_{it} + \epsilon_{it}$$

여기서, MTR01<sub>it</sub>는 t연도 i기업의 완전예측 한계세율, MTR<sub>it</sub>는 t연도 i기업의 한계세율 측정치(MTR02~MTR10),  $\epsilon_{it}$ 는 오차항을 의미함.

2. 집단(portfolio)은 변동계수(과세소득 변화의 표준편차를 평균으로 나눈 값)를 기준으로 5개 집단으로 구성되며, 집단별 관찰수는 212개 기업-연도임.

3. \*는 0.1, \*\*는 0.05, \*\*\*는 0.01 수준에서 유의하다는 것을 나타냄.

<표 4-4>는 집단별 완전예측 한계세율에 대한 한계세율 대리변수의 예측력을 비교하고 있다. 전체 표본에 대한 동일한 분석결과인 <표 5-3>의 결과는 시뮬레이션 한계세율, 법정한계세율, 4분변수, 3분변수, 과세소득 더미변수 순으로 높은 설명력을 보여주고 있다. 이에 비하여, <표 4-4>의 분석결과는 한계세율 대리변수의 결정계수가 집단 3과 집단 4에서 다소 감소하고 있어 설명력이 감소하고 있는 것으로 나타나고 있으나, <표 4-3>의 분석결과와 유사하게 나타나고 있어 전체표본에 대한 분석결과와 유사한 분석결과를 제시하고 있다.

이러한 분석결과는 시뮬레이션 한계세율이 완전예측 한계세율을 예측하는데 가장 우수한(즉, 설명력이 큰) 측정치라는 것을 알 수 있으며, 시뮬레이션 한계세율을 추정하기 어려운 경우에는 법정한계세율, 4분변수, 3분변수, 과세소득 더미변수가 한계세율에 대한 대리변수로 이용가능한 대안이 될 수 있다는 전체 표본에 대한 분석결과를 뒷받침하고 있다는 것을 알 수 있다. 따라서, 전체 표본에 대한 분석결과가 표본의 특성에 따라 달라지지 않는다는 것을 시사한다.

#### 나. 연도별 분석

설명변수 간에 상호독립성이 없는 경우, 한계세율 대리변수는 특정 연도의 거시경제적인 상황변동에 의해 유사한 영향을 받게 될 것이다. 이 경우 특정 연도에 경제에 미치는 영향은 대리변수의 예측능력에 유사한 영향을 미치게 될 것이므로 설명변수 간 상호독립성이라는 전통적인 회귀분석의 가정에 위배되게 된다. 예를 들어, 만약  $t+2$ 연도에 불경기가 발생한다면 완전예측 한계세율은  $t$ 연도에 비해 더 낮을 것이다. 따라서 경제상황이 분석결과에 영향을 미치는지 여부를 분석하기 위하여 연도별로 회귀분석을 수행하였다.

<표 4-5>와 같이 분석결과가 당기 및 미래의 경제적 상황에 의해 영향을

18) <표 4-4>는 5개 집단에 대한 분석표로 구성되고, <표 4-5>는 6개 연도에 대한 분석표로 구성되며, <표 4-6>은 4가지 분류기준에 따라 4개의 표로 구성되어 있기 때문에, 전체 분석결과를 제시하지 못하고 각각 첫 번째 분류기준에 따른 분석결과만을 제시하고 있으며, 나머지 분석표는 '부록'에 제시하였다.

받는지 여부를 검증하기 위해 1991년부터 1996년까지 6년 동안 각 연도별로 한계세율 대리변수들이 완전예측 한계세율을 설명하는 정보를 분석하는 회귀 분석을 수행하였다.

각 연도별 회귀분석 결과는 전체 표본에 대한 동일한 분석결과인 <표 4-3>의 분석결과와 유사하며, 연도별로 크게 다른 양상을 보여주고 있지 않다. 시뮬레이션 한계세율은 모든 분석연도에 있어 가장 높은 설명력을 보여주고 있다. 또한 법정한계세율, 4분변수, 3분변수, 과세소득 더미변수도 다른 한계세율 대리변수 보다 높은 설명력을 보여주고 있다.

<표 4-5> 연도별 한계세율 대리변수의 예측능력 분석

연도	변수	$\alpha$ (t값)	$\beta$ (t값)	F	수정 R <sup>2</sup>
1991년	시뮬레이션 한계세율	0.0088 (0.98)***	0.9756 (37.20)***	1384.04 ***	0.8860
	법정한계세율	0.0632 (6.70)***	1.3973 (29.83)***	889.66 ***	0.8331
	과세소득 더미변수	0.0616 (4.21)***	0.8062 (19.10)***	364.65 ***	0.6714
	이월결손금 더미변수	0.1515 (8.23)***	0.5463 (10.16)***	103.23 ***	0.3648
	3분변수	0.0266 (1.72)*	0.9241 (20.20)***	407.98 ***	0.6957
	4분변수(균등세율)	0.0156 (1.09)	0.9542 (22.78)***	519.13 ***	0.7443
	Manzon 한계세율	0.0120 (0.34)	0.8996 (9.22)***	85.08 ***	0.3208
	평균세율	0.2377 (17.33)***	0.2767 (7.57)***	57.27 ***	0.2402
	Zimmerman 세율	0.3116 (30.18)***	0.2073 (2.31)**	5.31 **	0.0237

1. 연구모형은 다음과 같음.

$$MTR01_{it} = \alpha + \beta MTR_{it} + \epsilon_{it}$$

여기서, MTR01<sub>it</sub>는 t연도 i기업의 완전예측 한계세율, MTR<sub>it</sub>는 t연도 i기업의 한계세율 측정치(MTR02~MTR10),  $\epsilon_{it}$ 는 오차항을 의미함.

2. \*는 0.1, \*\*는 0.05, \*\*\*는 0.01 수준에서 유의하다는 것을 나타냄.

이러한 분석결과는 시뮬레이션 한계세율이 완전예측 한계세율을 예측하는데 가장 우수한 측정치라는 것을 알 수 있으며, 시뮬레이션 한계세율을 추정하기 어려운 경우에는 법정한계세율, 4분변수, 3분변수, 과세소득 더미변수가 한계세율에 대한 대리변수로 이용가능한 대안이 될 수 있다는 것을 보여주고 있다. 이러한 결과는 전체 표본에 대한 분석결과가 각 연도별로 발생가능한 경제적 상황변동에 의해 영향을 받는 것이 아니라는 것을 시사한다.

#### 다. 예측능력에 대한 추가분석

본 절에서는 한계세율과 같은 기업의 조세관련 특성이 내생적일 수 있는지 여부에 대한 분석을 수행한다. 개별 기업의 한계세율은 기업의 자금조달정책에 따라 내생적으로 영향을 받을 수 있다.

한계세율에 영향을 미치는 내생적인 영향을 통제하기는 어려우나, 본 연구에서는 향후 2년도( $t+2$ )의 부채 절대액이 일정 비율로 유지되는 표본기업을 내생적인 영향을 받지 않는 기업으로 규정하고, 해당 기업 표본에 대해 회귀분석을 수행함으로써 기업정책을 통해 내생적으로 기업의 한계세율을 변경하는지 여부에 대해 수행되었다. 본 연구에서는 2년 후 부채가 일정비율로 유지되는 기업을 2년 후 부채가 당기의 80~120%인 기업을 기준으로 선정하였다.<sup>19)</sup>

19) 한계세율에 영향을 미치는 내생적인 영향을 통제하기 위하여 향후 2년도( $t+2$ )의 부채 절대액이 일정 비율로 유지되는 표본기업을 내생적인 영향을 받지 않는 기업으로 규정하고 해당 기업 표본에 대해 분석한 연구로는 Graham(1996a)과 고종권(2002)의 연구가 있다.

본 연구에서는 고종권(2002)와 같이 2년 후 부채가 일정비율로 유지되는 기업을 2년 후 부채가 당기의 80~120%인 기업을 기준으로 선정하여 분석하였다(구분 1). 또한, 본 연구에서는 부채수준의 변화에 따른 민감도를 분석하기 위하여, 2년 후 부채가 당기의 85~115%인 기업(구분 2), 2년 후 부채가 당기의 90~110%인 기업(구분 3)과 2년 후 부채가 당기의 95~105%인 기업(구분 4)에 대해 동일한 분석을 수행하였다. 분석결과는 전체 표본에 대한 분석결과와 유사하며, 크게 다른 양상을 보여주고 있지 않다. 시뮬레이션 한계세율은 모든 '구분'에 대해 가장 높은 설명력을 보여주고 있다. 또한, 법정한계세율, 4분변수, 3분변수, 과세소득 더미변수도 다른 한계세율 대리변수 보다 높은 설명력을 보여주고 있다.

<표 4-6> 부채비율별 한계세율 대리변수의 예측능력 분석

구분	변수	$\alpha$ (t값)	$\beta$ (t값)	F	수정 R <sup>2</sup>
1	시뮬레이션 한계세율	0.0326 (4.91)***	0.9018 (40.77)***	1662.42 ***	0.8048
	법정한계세율	0.0803 (13.52)***	1.3113 (38.35)***	1470.35 ***	0.7848
	과세소득 더미변수	0.0807 (9.62)***	0.7256 (26.40)***	697.03 ***	0.6333
	이월결손금 더미변수	0.0797 (5.55)***	0.6533 (14.63)***	214.02 ***	0.3458
	3분변수	-0.0176 (-1.83)*	1.0344 (32.73)***	1071.26 ***	0.7265
	4분변수(균등세율)	0.0048 (0.56)	0.9727 (33.76)***	1139.81 ***	0.7386
	Manzon 한계세율	-0.0190 (-0.86)	0.9079 (13.76)***	189.38 ***	0.3185
	평균세율	0.1906 (21.41)***	0.3037 (12.27)***	150.51 ***	0.2706
	Zimmerman 세율	0.2584 (33.02)***	0.2750 (3.73)***	13.88 ***	0.0310

1. 연구모형은 다음과 같음.

$$MTR01_{it} = \alpha + \beta MTR_{it} + \epsilon_{it}$$

여기서,  $MTR01_{it}$ 는 t연도 i기업의 완전예측 한계세율,  $MTR_{it}$ 는 t연도 i기업의 한계세율 측정치( $MTR02 \sim MTR10$ ),  $\epsilon_{it}$ 는 오차항을 의미함.

2. 구분의 '1'은 2년 후 부채가 당기의 80~120%인 기업(n=404)을 의미함.

3. \*는 0.1, \*\*는 0.05, \*\*\*는 0.01 수준에서 유의하다는 것을 나타냄.

<표 4-6>의 2년 후 부채가 당기의 일정 비율에 해당하는 기업의 회귀분석 결과는 전체 표본에 대한 분석결과와 유사하며, 크게 다른 양상을 보여주고 있지 않다. 시뮬레이션 한계세율은 모든 '구분'에 대해 가장 높은 설명력을 보여주고 있다. 또한, 법정한계세율, 4분변수, 3분변수, 과세소득 더미변수도 다른 한계세율 대리변수 보다 높은 설명력을 보여주고 있다.

이러한 분석결과는 시뮬레이션 한계세율이 완전예측 한계세율을 예측하는데 가장 우수한 측정치라는 것을 나타내며, 시뮬레이션 한계세율을 추정하기 어려운 경우에는 법정한계세율, 4분변수, 3분변수, 과세소득 더미변수가 한계세율에 대한 대리변수로 이용가능한 대안이 될 수 있다는 것을 보여준다. 이는

전체 표본에 대한 분석결과가 기업의 조세관련 특성이 내생적인 기업에 의해 영향을 받는 것이 아니라는 것을 시사한다.

## V. 결 론

본 연구는 한계세율의 측정방법에 대한 선행연구와 선행연구에서 사용된 한계세율의 대체 측정치를 종합하고, 우리나라의 법인세법 규정을 반영하여 기업의 재무자료를 사용하여 시뮬레이션 한계세율을 측정하였다. 그리고 시뮬레이션 한계세율 측정치를 기존연구에서 사용된 한계세율의 대리변수와 비교함으로써 시뮬레이션 한계세율이 한계세율의 대체측정치에 비하여 합리적인 한계세율의 대리변수인지 여부를 분석하였다.

본 연구에서 사용된 한계세율 측정치를 완전예측 한계세율, 시뮬레이션 한계세율, Manzon 한계세율 등 한계세율 측정치와 법정한계세율, 과세소득 더미변수, 이월결손금 더미변수, 3분변수와 4분변수 등 더미변수, 그리고 평균세율, Zimmerman 세율 등 유효세율 측정치를 사용하여 측정하였다.

분석결과는 시뮬레이션 한계세율이 완전예측 한계세율을 예측하는 데 가장 우수한 측정치라는 것을 알 수 있다. 본 연구에서 추가적으로 고려한 한계세율에 대한 대리변수 중 4분변수가 한계세율에 대한 대리변수 중 시뮬레이션 한계세율과 법정한계세율 다음의 설명력을 제시해 주고 있어, 3분변수와 과세소득 더미변수보다 더 우수한 대리변수인 것으로 나타나고 있다. 그러므로 본 연구의 추가적인 공헌도를 제시해 주고 있다 할 것이다.

한계세율은 기업의 투자 및 재무관련 의사결정에 중요한 영향을 미친다. 본 연구는 한계세율의 측정과 대리변수의 평가에 초점을 맞추고 있으므로 기업의 의사결정에 미치는 조세정책의 영향을 분석하는 데 시사점을 제공할 수 있을 것이다. 따라서 본 연구의 한계세율 측정과 대리변수에 대한 평가 결과는 기업의 의사결정에 미치는 한계세율의 영향에 대한 연구에 시사점을 제공할 수 있을 것이며, 조세관련 정책당국의 법인세와 투자에 대한 조세정책 수립에 있

어서도 중요한 역할을 할 수 있을 것으로 판단된다.

그러나 본 논문은 여러 가지 한계점이 있기 때문에 본 논문의 분석결과를 논의할 때에는 이러한 한계점을 고려하여 주의 깊게 해석하여야 할 것이다. 또한 이러한 한계점들은 한계세율의 측정에 관한 더 개선된 연구를 수행하는데 있어 미래 연구방향이 될 수 있을 것이다.

첫째, 본 논문은 한계세율의 측정에 있어 기업의 세무자료가 기밀로 처리되고 있어 입수 불가능하기 때문에 세무자료를 사용하여 분석하지 못하고 재무제표 자료를 분석하였다는 한계가 있다. 둘째, 본 연구는 상장기업의 재무제표 자료만을 대상으로 하고 있기 때문에 외부감사 대상법인, 등록법인이나 중소기업의 자료를 분석하지 않았다는 한계점이 있다.<sup>20)</sup> 셋째, 본 논문의 분석에서 사용한 KIS-FAS 자료가 결손금 누적으로 인한 상장폐지된 기업을 제외하고 있고, 본 연구의 표본선정기준에서 분석대상기간 동안 계속상장된 기업을 대상으로 하고 있어 생존편의가 분석결과에 영향을 미칠 수 있을 것이다. 미래 연구에서는 이러한 한계점을 해결하여 분석의 타당성을 제고할 수 있을 것이다.

---

20) 그러나, 두번째와 세번째 한계점은 우리 나라의 실증회계연구에서 대부분 개선하지 못하고 있는 문제점이라 할 수 있으며, 이들 문제점을 개선하기 위해서는 상장기업 이외의 기업의 재무제표 자료에 대한 신뢰성과 입수불가능 문제와 상장폐지 기업의 재무제표 자료에 대한 입수 불가능성과 신뢰성 문제를 해결하여야 하나, 아주 많은 기업과 재무제표 항목에 대한 자료입수의 어려움으로 인하여 쉽지 않을 것으로 판단된다.

## 참 고 문 헌

- 고종권, 「한계세율의 대응치」, 『경영학연구』, 제31권 제4호, 2002, pp. 859~879.
- 곽태원, 『감가상각제도와 자본소득과세』, 한국개발연구원, 1985.
- 국세청, 『국세통계연보』, 2003.
- 김준영, 『한국의 자본코스트와 법인실효세율에 관한 연구』, 정책자료연구 91-32, 한국개발연구원, 1991.
- 김유찬, 「법인세율 인하의 투자유인효과」, 『재정금융연구』, 1994.
- 윤건영, 「자본소득세정책의 투자유인효과분석」, 『재정논집』, 1988.
- 윤종인, 「유효한계세율의 추이와 변동요인: 1983~1995년 시계열자료를 이용하여」, 『재정논집』, 2000, pp. 171~206.
- 이준규, 「한계세율의 추정에 관한 연구」, 『세무학연구』, 제10호, 1997, pp. 129~148.
- 이준규 · 이은상, 『기업의 조세전략』, 조세통람사, 2001.
- Auerbach, A. and J. Hines, Jr., “Investment Incentives and Frequent Tax Reforms,” *American Economic Review*, 1988, pp. 211~216.
- Beaver, W., R. Lambert and D. Morse, “The Information Content of Security Prices,” *Journal of Accounting and Economics*, 1980, pp. 3~28.
- Bradford, D. and C. Stuard, “Issues in the Measurement and Interpretation of Effective Tax Rates,” *National Tax Journal*, 1986, pp. 307~316.
- Callihan, D, “Corporate Effective Tax Rates: A Synthesis of the Literature,” *Journal of Accounting Literature*, 1994, pp. 1~43.
- DeAngelo, H. and R. Masules, “Optimal Capital Structure under Corporate and Personal Taxation,” *Journal of Financial Economics*, 1980, pp. 3~29.
- Dhaliwal, D., R. Trezevant and S. Wang, “Taxes, Investment-Related Tax Shields and Capital Structure,” *The Journal of the American Taxation Association*, 1992, pp. 1~21.
- Graham, J., “Proxies for the Corporate Marginal Tax Rate,” *Journal of Financial Economics*, 1996a, pp. 187~221.

- Graham, J., "Debt and the Marginal Tax Rates," *Journal of Financial Economics*, 1996b, p. 41~73.
- Harwood, E. and G. Manzon, "Tax Clientele and Debt Maturity," *The Journal of the American Taxation Association*, 2000, p. 22~39.
- Jorgenson, D., "Capital Theory and Investment Behavior," *American Economic Review*, 1963, pp. 366~378.
- Mackie-Mason, J., "Do Taxes affect Corporate Financing Decision?," *Journal of Finance*, 1990, p. 1471~1493.
- Manzon, G., "The Role of Debt in Early Debt Retirement," *Journal of the American Taxation Association*, 1994, p. 87~100.
- Omer, T., K. Molloy, and D. Ziebart, "Measurement of Effective Corporate Tax Rates Using Financial Statement Information," *The Journal of the American Taxation Association*, 1991, p. 77~92.
- Scholes, M., P. Wilson and M. Wolfson, "Tax Planning, Regulatory Capital Planning and Financial Reporting Strategy for Commercial Banks," *Review of Financial Studies*, 1990, p. 625~650.
- Scholes, M., and M. Wolfson, E. Erickson, E. Maydew and T. Shevlin, *Taxes and Business Strategy: A Planning Approach*, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., 2002.
- Scholes, M., and M. Wolfson, *Taxes and Business Strategy: A Planning Approach*, Prentice-Hall, Inc., 1992.
- Shackelford, D. and T. Shevlin, "Empirical Tax Research in Accounting," *Journal of Accounting and Economics*, 2001, p. 321~387.
- Shevlin, T. "Estimating Corporate Marginal Tax Rates with Asymmetric Tax Treatment of Gains and Losses." *The Journal of the American Taxation Association*, 1990, p. 51~67.
- Stark, A., "Inventories, Credit Transactions, and the Marginal Effective Tax Rates," *Journal of Accounting and Public Policy*, 1985, p. 225~231.

## <부 록>

### 1. 과세소득의 변동계수에 따른 집단별 예측능력 분석

변 수	수정 R <sup>2</sup>				
	집단 1	집단 2	집단 3	집단 4	집단 5
시뮬레이션 한계세율	0.8786	0.8426	0.8159	0.7248	0.7714
법정한계세율	0.7867	0.7721	0.7557	0.6943	0.7260
과세소득 더미변수	0.7727	0.8054	0.7106	0.6271	0.5200
이월결손금 더미변수	0.3658	0.2558	0.3607	0.1664	0.2539
3분변수	0.8167	0.7563	0.7469	0.6518	0.6239
4분변수(균등세율)	0.8300	0.8251	0.7761	0.6827	0.6360
Manzon 한계세율	0.3320	0.3501	0.2675	0.1613	0.2426
평균세율	0.2682	0.2992	0.3174	0.1809	0.1960
Zimmerman 세율	-0.0011	0.0400	0.0367	0.0329	0.0646

1. 집단(portfolio)은 변동계수(과세소득 변화의 표준편차를 평균으로 나눈 값)를 기준으로 5개 집단으로 구성되며, 집단별 관찰수는 212개 기업-연도임.

### 2. 연도별 한계세율 대리변수의 예측능력 분석

변 수	수정 R <sup>2</sup>					
	1991년	1992년	1993년	1994년	1995년	1996년
시뮬레이션 한계세율	0.8860	0.7675	0.8180	0.8303	0.7630	0.6663
법정한계세율	0.8331	0.7464	0.7522	0.7502	0.7705	0.6292
과세소득 더미변수	0.6714	0.6415	0.7324	0.6281	0.6698	0.5034
이월결손금 더미변수	0.3648	0.2472	0.2238	0.2809	0.3099	0.2156
3분변수	0.6957	0.6790	0.7158	0.7298	0.7094	0.6290
4분변수(균등세율)	0.7443	0.7250	0.7651	0.7459	0.7355	0.6123
Manzon 한계세율	0.3208	0.2177	0.2716	0.2795	0.1618	0.1698
평균세율	0.2402	0.1270	0.2374	0.2778	0.2529	0.2950
Zimmerman 세율	0.0237	0.0519	0.0038	0.0098	0.0514	0.0459

3. 부채비율별 한계세율 대리변수의 예측능력 분석

변 수	수정 R <sup>2</sup>			
	구분 1	구분 2	구분 3	구분 4
시뮬레이션 한계세율	0.8048	0.8048	0.7985	0.8187
법정한계세율	0.7848	0.7887	0.7773	0.7509
과세소득 더미변수	0.6333	0.6022	0.5743	0.4118
이월결손금 더미변수	0.3458	0.3412	0.3721	0.4284
3분변수	0.7265	0.7069	0.7164	0.6713
4분변수(균등세율)	0.7386	0.7177	0.7128	0.6230
Manzon 한계세율	0.3185	0.3603	0.4367	0.5334
평균세율	0.2706	0.2487	0.2341	0.1388
Zimmerman 세율	0.0310	0.0185	0.0079	0.0409

1. 구분의 '1'은 2년 후 부채가 당기의 80~120%인 기업(n=404)을, '2'는 2년 후 부채가 당기의 85~115%인 기업(n=309)을, '3'은 2년 후 부채가 당기의 90~110%인 기업(n=204)을, '4'는 2년 후 부채가 당기의 95~105%인 기업(n=94)을 의미함.

# 레버리지가 기업투자결정에 미치는 영향 : System-GMM을 이용한 상장제조기업 패널 분석

조삼용\* · 신선우\*\* · 이훈현\*\*\*

## 요 약

본 연구는 1981~2002년 기간 중 계속 상장된 389개 제조기업의 불균형 패널자료를 이용하여 레버리지가 기업투자지출에 미치는 영향을 분석하였다. 이를 위해 투자의 동태적 모형을 구축하고 이를 추정하기 위해 Dynamic System GMM 기법을 이용하였다.

본 논문의 추정 결과는 투자에 대한 레버리지의 영향이 분석대상기간 동안 유의하게 음(-)의 관계를 나타내었다. 특히 성장기회가 낮은 기업(토빈q가 1보다 작은 기업, 매출증가율 하위 25%기업, 총고정자산증가율 하위 25%기업)일수록 더 큰 음의 영향을 받는 것으로 나타났는데, 이는 Jensen(1986)과 Stulz(1990)의 부채에 의한 대리인비용의 감소효과 이론과 일치한다. 즉, 추정기간 동안 우리나라 제조업에 속한 기업은 부채사용이 높을수록 무리한 기업규모 확대를 억제하는 효과가 있고 Myers and Majluf(1984)의 예상과는 달리 투자기회와 성장기회가 낮은 기업에서 대리인비용의 감소효과가 더욱 강하게 나타남을 알 수 있다.

## I. 서 론

레버리지(financial leverage)와 기업의 투자결정 및 투자기회 간의 관련성은 재무학자들의 주된 연구주제 중의 하나이다. 1997년말에 발생한 우리나라의

\* 한누리투자증권 수석연구원, \*\* 전남대학교 경제학과 강사, \*\*\* 한국기초과학지원연구원  
본 논문에 대한 좋은 조언을 해주신 두 심사위원께 감사드리며 남아있는 오류는 저자들의 책임임을 밝힌다.

외환위기는 기업가치에 막대한 손실을 초래하였으며, 그 이후에 부채비율과 자본조달정책에 관한 관심이 크게 증대되었다. 경기침체와 고금리로 인하여 자본구조가 취약한 기업들은 이자지급능력의 상실로 말미암아 도산되는 사태에 이르게 되었다. 이러한 시점에서 정부주도하의 기업부채비율 축소방침이 기업개혁 과제의 일환으로 실행되었다. 정부는 기업의 재무구조 개선, 부채비율 축소를 기업구조조정 최우선 과제로 상정하고 1998년말 까지 부채비율 200%라는 목표를 제시하였다. 또한 1997말 기업의 연쇄도산으로 은행들의 부실화가 심화되자 은행들도 대출비중을 축소하는 경향을 나타냈다. 이러한 현상에 대한 해석은 레버리지의 투자에 대한 영향이 정(+)의 관계인지, 부(-)의 관계인지의 여부에 관한 해석으로 귀결될 수 있다. 일반적으로 부채사용의 증가는 기업가치에 긍정적인 영향을 미치는 효과가 있는 반면 과도한 부채사용은 오히려 기업도산 가능성과 관련한 비용을 증가시키고 채권자와의 이해관계의 차이에서 발생하는 대리인비용이라는 부정적인 효과를 발생시키게 된다. 그러나 기업가치에 긍정적인 영향을 주는 효과는 부채의 증가에 따라 계속해서 증가하는 것이 아니라 일정한도를 초과하게 되면 기업가치에 부정적인 영향을 미치게 된다. 이러한 입장은 외환위기 이전에 국내기업들의 높은 부채비율이 기업가치에 긍정적인 영향을 미쳤을 가능성이 있을지라도 결국에는 기업가치에 부정적인 영향을 미치게 될 수밖에 없을 것이다. 더군다나 부채사용이 기업가치에 영향을 미치는 것은 기업의 특성에 따라 달라질 것으로 판단된다.

이론적으로 Modigliani and Miller(1958)의 정리하에서는 레버리지와 투자는 아무런 관련성이 존재하지 않는다. 즉 이윤획득이 가능한 투자기회를 갖는 기업은 현재 자신의 재무상태와 관계없이 투자를 위한 자금을 얻을 수 있다. 기업의 투자정책이 이윤을 결정하는 기초변수인 미래의 수요, 기업의 생산기술, 시장이자율 같은 요인에만 의존하게 된다. 그러나 그 이후 자본구조에 관련한 이론 및 실증연구들은 레버리지와 투자기회가 상당한 관련성을 갖고 있음을 제기하였다. 이론적인 측면에서 보면 거래비용이나 비대칭적 정보에 기인한 시장의 불완전성이 존재할 경우에 자금조달이 기업의 실질투자결정에 영향을 미치게 된다. 불완전 자본시장이 존재하는 상황에서는 주주와 채권자 및

경영자 간의 상호작용에 의해서 발생하는 대리인 문제로 인해 과소투자(underinvestment) 또는 과도투자(overinvestment) 유인이 야기된다. 이러한 대리인 문제는 투자가 경제기초여건(economic fundamentals)의 변화에 대해 완벽하게 반응하지 않거나 또는 과도하게 반응하게 한다. 예를 들면, Myers(1977)는 높은 부채 사용이 양(+의) 순현재가치가 있는 사업을 기각하는 과소투자 유인이 존재한다고 보았는데 이는 기업이 성장기회를 가지고 있더라도 이 투자로 인해 증가된 현금흐름이 부채 원리금을 전액 변제하지 못할 경우에는 주주들이 투자를 이행할 유인을 갖지 못한다는 것이다. 즉, 투자의 이득이 모두 채권자들에게 귀속되기 때문에 주주들로서는 투자 유인이 없어 과소투자가 발생하게 된다는 것이다. 또한 Jensen(1986)과 Stulz(1990)의 연구도 레버리지와 투자 간에 음의 관계가 존재한다고 예측하지만 이러한 관계가 경영자의 재량권을 제한함으로써 낮은 성장기업의 주주에게는 이득이 될 수 있음을 강조한다. 즉 기업의 높은 부채 사용이 경영자로 하여금 이윤 가능성이 낮은 투자기회에 투자하는 것을 억제하므로 부채 사용은 궁극적으로 기업가치의 증대를 가져오는 것으로 판단한다. 위의 연구들과 유사하게 Lang, Ofek and Stulz(1996)도 기업레버리지와 성장 사이에 음의 관계가 있음을 제시하였다. 그러나 이러한 음의 관계는 이윤 가능한 성장기회가 적은 낮은  $q$ 를 갖는 기업에서만 성립함을 보임으로써 레버리지가 빈약한 성장기회를 갖는 기업의 과도투자를 억제한다는 견해와 일치된다. 따라서 Myers and Majluf(1984)의 주장처럼 부채가 단순히 기업의 성장기회에 대한 대리변수가 아니라 Jensen(1986)과 Stulz(1990)의 견해인 부채가 대리인 비용을 억제하는 요인으로 작용하고 있음을 나타낸다. 이처럼 레버리지가 투자결정에 어떻게 반영되고 있는가는 한 나라의 금융구조와 기업의 특성에 따라 다르게 나타날 수 있다.

McConnell and Servaes(1995)와 Lang et al.(1996)은 통합(pooling) 회귀분석을 이용함으로써 개별기업 효과를 무시하고 있다. 만약 이들 변수 간의 관련성이 관측 불가능한 개별기업의 특성에 의해 영향을 받는다면 이들이 사용한 분석방법으로는 레버리지가 기업성장에 미치는 영향을 완벽하게 식별해 낼 수 없다. 그리고 부채가 성장기회의 대리변수로 작용한다면 이는 부채와 투자

간의 관계가 서로 영향을 미치는 양방향 인과관계를 나타낼 가능성이 존재한다는 것을 의미하기 때문에 이를 통제할 수 있는 분석방법이 이용되어야 한다. 또한 우리나라의 기업자료를 이용한 선행연구들은 최소자승법(OLS) 내지 2SLS를 이용하여 추정하고 있으나 최근의 계량경제학의 발전은 동태적 패널자료를 최소자승법으로 추정할 경우 추정치의 편의(bias)가 발생함을 보여주고 있다.

레버리지와 투자의 관계에 대해 직접적으로 분석한 국내 연구는 많지 않은 실정이다. 이와 관련된 대부분의 연구들이 내부자금이 투자지출에 미치는 영향에 관한 것이다. 레버리지를 투자지출에 대한 통제변수로 이용한 연구들이 주를 이루고 있다. 윤봉한·오규택(1999)과 김지수·정기웅(2000)은 투자지출과 부채비율 간의 관계가 양(+)의 관계가 있음을 제시하였다. 또한 김지수·조정일(2000)은 전체기업의 분석결과 부채비율이 투자지출에 미치는 영향은 거의 없거나 비유의적인 양(+)의 관계임을 나타내었다. 또한 투자기회가 낮은 기업에서 부채와 투자지출 간의 관계가 유의적인 양(+)의 관계로 나타나고 있다. 이러한 결과는 앞에서 언급한 Myers and Majluf(1984)와 Lang et al.(1996)의 결과와는 완전히 상반된 것이다. 이병기(2000)는 GMM(Generalized Method of Moments)추정방법을 이용하여 기업투자가 현금흐름에 민감하게 반응하는가를 분석하였다. 전체기업의 분석에서 전기 부채비율이 통계적으로 유의한 음(-)의 관계가 있음을 제시하였다. 또한 재벌기업과는 달리 독립기업의 경우에 부채비율이 통계적으로 유의한 음의 계수를 나타내 기업의 자본구조가 투자에 영향을 주고 있음을 암시한다. 즉 높은 부채수준이 재무위험의 가능성을 증가시켜 자금의 공급자들이 높은 수익을 요구함으로써 기업투자가 감소하게 된다는 것이다. 국내 연구들이 서로 다른 결과를 나타내는 이유는 변수의 구성이나 모형설계 또는 이용된 기업의 특성들이 다르기 때문일 것이다. 그러나 가장 중요한 차이는 추정방법상의 차이일 것이다. 이병기(2000)를 제외한 대부분의 연구들이 최소자승법(OLS 내지 2SLS)을 이용하여 추정하고 있다. 그러나 동태적인 패널자료를 최소자승법으로 추정할 경우 추정치의 편의가 발생할 수 있다. 또한 균형패널자료를 이용함으로써 정보의 손실이 많다는 점도 들 수

있다. 패널분석에서 모형 내 대부분의 설명변수들이 종속변수와 연립적으로 결정되든지 또는 종속변수와 양방향 인과관계를 갖게 된다. 기업들 간의 이질성과 변수들 간의 내생성문제를 고려하지 않을 경우에 잘못된 결과를 도출할 가능성이 존재하게 된다. 따라서 이러한 설명변수의 내생성을 통제하고 일치 추정량을 얻기 위해서는 도구변수 추정법(IV)이 이용되어야 한다. 패널자료의 분석에서는 내생성이 고려되어야 하며 외생변수를 가정하는 최소자승법 등의 추정량은 적합하지 않다. 아울러 기존 연구들은 현재의 투자가 과거의 투자에 의해 영향을 받음에도 불구하고 이를 명시적으로 고려하고 있지 않으며 다년 간의 균형패널을 분석함으로써 정보의 손실이 많다는 한계점이 있다.

본 논문이 기존 연구들과 다른 점은 주주가치의 극대화라는 목적함수를 통해 투자의 동태적 효과를 최적화 모형으로 유도함으로써 모형설정 오류를 제거하였으며 설명변수들의 내생성 문제를 고려함으로써 설명변수들이 외생적이라고 가정하는 기존연구를 보완하고 있다. 즉 추정모형에 시차종속변수를 포함하며 기업의 관측 불가능한 효과(individual specific effect)를 통제하고 변수들 간의 내생성 문제를 명시적으로 고려하여 추정할 수 있는 Arellano and Bond(1998)의 system GMM 기법을 이용하였다.

본 연구는 다음과 같이 구성되었다. 제II장에서는 동태적 투자모형 및 자료, 분석방법에 대해 설명하였다. 제III장은 system GMM을 이용한 실증분석결과를 나타내고 제IV장은 결론 및 시사점이다.

## II. 분석모형, 자료 및 추정방법

### 1. 모 형

완전자본시장을 가정하는 기존의 신고전학과 투자모형은 투자수요의 중요한 결정요인으로 소득과 이자율을 들고 있다. 그러나 정보의 비대칭성이 존재하는 현실세계는 불완전 자본시장이 일반적이며 Modigliani and Miller(1958)의

주장과는 달리 투자정책과 투자자금조달이 서로 독립적이지 않다. 따라서 자본시장 불완전성을 고려한 투자모형을 구성하여 기업의 투자지출과 레버리지 간의 관계를 분석하기 위해 Gilchrist and Himmelberg(1998) 모형을 이용한다.

이들 모형은 자본시장의 불완전성을 허용하는 것으로 정보의 비대칭성(informational asymmetries), 감시비용(costly monitoring), 계약이행(contract enforcement), 유인문제(incentive problem) 등으로 인해 내부자금과 외부자금 조달비용이 차이가 발생하게 되어 내부자금과 외부자금 사이에 완전 대체관계가 성립하지 않는다. 그 외에 정보의 비대칭성은 기업의 순자산(net worth), 외부자금조달 비용, 투자 사이에 연관성을 제공해 준다.

### 가. 최적화 문제

기업이 자본축적제약과 외부자금조달제약하에서 기업의 현재가치(미래 배당의 기대가치)를 극대화한다고 가정한다.

$$V(K_t, B_t, \xi_t) = \max_{\{I_{t+s}, B_{t+s+1}\}_{s=0}^{\infty}} D_t + E_t \sum_{s=1}^{\infty} \prod_{k=1}^s \left( \frac{1}{1+r_{t+k}} \right) D_{t+s} \quad (1)$$

$$D_t = \Pi(K_t, \xi_t) - C(I_t, K_t) - I_t + B_{t+1} - (1+r_t)(1+\eta(B_t, K_t, \xi_t))B_t \quad (2)$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \quad (3)$$

$$D_t \geq 0 \quad (4)$$

여기에서  $K_t$ 를  $t$  기간 초 자본량,  $\xi_t$ 는 기업의 자본량에 대한 생산성 충격,  $B_t$ 는 기업의 순금융부채,  $\prod_{k=1}^s (1+r_{t+k})^{-1}$ 은  $s$ 기간 할인요소(discount factor)이다. 금융마찰(financial frictions)은 부채가 외부자금조달의 원천이라는 가정을 통해 구체화되고, 위험 중립적인 부채 보유자는 외부자금조달 프리미엄( $\eta_t = (K_t, B_t, \xi_t)$ )을 요구하게 된다. 이것은 대리인비용으로 인해 차입량의 증

가함수로 나타난다. 즉,  $\partial\eta/\partial B > 0$ 이다. 즉 높은 레버리지(leverage)를 갖는 기업들은 정보의 비대칭성으로 인해 추가적인 프리미엄을 지불해야 된다는 것이다. 부채에 대한 총요구수익률이  $(1+r)(1+\eta(K_t, B_t, \xi_t))$ 라고 가정<sup>1)</sup>하고  $\Pi(K_t, \xi_t)$ 는 이윤함수로 정의한다. 자본스톡 축적은 투자지출( $I_t$ )과 감가상각률( $\delta$ )에 의존한다.  $C(I_t, K_t)$ 는 조정비용을 나타내며, 주주에게 제공되는 배당은  $D_t$ 이다. 기업의 자금 조달시 주식발행보다 부채가 더 중요하다면 배당에 대한 비음제약(non-negativity)을 가정하거나 주식보유자가 채투자하는 것보다 배당을 얻는 것을 더 선호한다는 가정이 필요하다. 따라서 본 연구는 Gilchrist and Himmelberg(1998)처럼 배당에 대한 비음제약을 도입하였다. 배당에 대한 비음제약은 정보 비대칭성에 기인한 신주 발행(new equity)과 관련된 잠재비용(shadow cost)이 존재한다는 것을 의미한다. 비음제약에 대한 라그랑지 승수(multiplier)를  $\lambda_t$ 라고 정의하면,  $\lambda_t$ 는 내부자금의 잠재비용으로 해석될 수 있으며 자금조달제약을 정의하는 데 이용된다.

#### 나. Euler 방정식

위의 극대화 문제로부터 유도된 오일러 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$1 + \frac{\partial C(I_t, K_t)}{\partial I_t} = E_t \left[ \left( \frac{1}{1+r_{t+1}} \right) \left( \frac{1+\lambda_{t+1}}{1+\lambda_t} \right) \left\{ \frac{\partial \Pi(K_{t+1}, \xi_{t+1})}{\partial K_{t+1}} + (1-\delta) \left( 1 + \frac{\partial C(I_{t+1}, K_{t+1})}{\partial I_{t+1}} \right) \right\} \right] \quad (5)$$

여기서,  $\frac{\partial C}{\partial I}$ 는 투자의 한계조정비용이고,  $\frac{\partial \Pi}{\partial K}$ 는 자본의 한계이윤,

$\left( \frac{1+\lambda_{t+1}}{1+\lambda_t} \right)$ 는 상대적 잠재가격이며 자금조달제약을 나타내는 요인으로

1) 이때  $r$ 은 무위험수익률이다.

2)  $(\partial D/\partial K)_{t+1} = (\partial \Pi/\partial K)_{t+1} - (\partial C/\partial K)_{t+1}$ 이다. 그러나  $(\partial C/\partial K)_{t+1}$ 가  $(\partial \Pi/\partial K)_{t+1}$ 에 비해 상대적으로 매우 작기 때문에 자본스톡에 관한 조정비용함수의 미분을 무시해도 좋을 것이다. (Laeven 2000, Himmelberg, Hubbard and Love 2000)

간주된다.

부채의 1계조건은 식(6)과 같다.

$$E_t \left[ \left( \frac{1 + \lambda_{t+1}}{1 + \lambda_t} \right) \left( 1 + \eta(K_{t+1}, B_{t+1}) + \frac{\partial \eta(K_{t+1}, B_{t+1})}{\partial B_{t+1}} B_{t+1} \right) \right] = 1 \quad (6)$$

부채의 1계조건식은 오일러 투자 방정식과 직접적인 관련이 없기 때문에 여기서는 부채선택을 암묵적으로 가정한 투자결정에 초점을 맞추어 분석한다.

위 식 (5)는 금기 투자의 한계비용이 다음 기까지 투자를 연기하는 할인된 한계비용과 같다는 것이다. 실증분석을 위한 모형을 설정하기 위해서는 신용제약과 *MPK*에 대한 수단을 식별해야 하고, 조정비용의 함수형태를 설정해야 한다. 또한 오일러 방정식을 선형형태로 표현하고 기대연산자를 제거해야 한다.

#### 다. 자금조달제약

만일 내부자금에 대한 잠재비용(*shadow cost*)이  $t+1$ 기보다  $t$ 기에 더 높다면(즉,  $\lambda_t > \lambda_{t+1}$ ),  $\left( \frac{1 + \lambda_{t+1}}{1 + \lambda_t} \right)$ 이 1보다 작게 된다. 현재 기간 자금을 이용하는 것이 다음 기간 자금을 이용하는 것보다 더 많은 비용을 지불하게 되므로 추가적인 할인 요인으로서 작용한다. 이러한 경우 기업이 자금조달제약에 직면했다고 하며,  $\left( \frac{1 + \lambda_{t+1}}{1 + \lambda_t} \right)$ 이 제약의 정도를 나타낸다. 완전자본시장에서는 모든  $t$ 시점에 대해서  $\lambda_t = \lambda_{t+1} = 0$ 이므로  $\left( \frac{1 + \lambda_{t+1}}{1 + \lambda_t} \right)$ 는 1이 된다. 이러한 상황에서는 기업이 자금조달제약에 직면하지 않는다. 자본시장이 불완전할 경우에는  $\lambda_t$ 가 상태변수들에 의존하게 된다. 그러므로  $\lambda_t$ 는 시변(*time-varying*)하며 관측 가능한 기업의 특성을 통해 식별될 수 있다. 대부분의 이전 연구들이 공통적으로 자금조달제약에 대한 대리변수로서 현금흐름(*cash flow*) 변수를 이용하고 있다.

$MPK_t$ 를 한계이윤함수라고 정의하고 1기간 할인율  $\beta_{t+1}$ 이 일정하다고 가정하면 투자에 대한 1계조건식은 식 (7)과 같다.

$$1 + \frac{\partial C(I_t, K_t)}{\partial I_t} = E_t \left[ \sum_{s=1}^{\infty} \left( \frac{1-\delta}{1+r_{t+1}} \right)^s \left( \prod_{k=1}^s \left( \frac{1+\lambda_{t+k}}{1+\lambda_{t+k-1}} \right) \right) MPK_{t+s} \right] \quad (7)$$

1계 테일러 근사를 이용하면,<sup>3)</sup>

$$1 + \frac{\partial C(I_t, K_t)}{\partial I_t} = E_t \left[ \sum_{s=1}^{\infty} \left( \frac{1-\delta}{1+r_{t+1}} \right)^s MPK_{t+s} \right] + \phi E_t \left[ \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^s \left( \frac{1-\delta}{1+r_{t+1}} \right)^s FIN_{t+k} \right] \quad (8)$$

$FIN_t$ 는 잠재비용에 영향을 미치는 금융변수(즉, 현금흐름)다.

조정비용은 Love(2003)가 제안한  $c(I_t, K_t) = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{I_t}{K_t} - \gamma \frac{I_{t-1}}{K_{t-1}} - \iota \right)^2 K_t$ 를 이용한다. 조정비용을 고려하면 식 (9)와 같다.

$$\frac{I_t}{K_t} = c + g \frac{I_{t-1}}{K_{t-1}} + \frac{1}{\alpha} E_t \left[ \sum_{s=1}^{\infty} \left( \frac{1-\delta}{1+r_{t+1}} \right)^s MPK_{t+s} \right] + \frac{\phi}{\alpha} E_t \left[ \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^s \left( \frac{1-\delta}{1+r_{t+1}} \right)^s FIN_{t+k} \right] \quad (9)$$

일반적인  $q$ 투자모형은 식 (9)에서  $\phi = 0$ 인 특수한 경우이며 미래 한계이윤의 현재가치에 대한 대리변수로서 토빈 $q$ 를 이용하여 추정한다.  $MPK$ 와  $FIN$ 은 선형조합으로 표현되어 있기 때문에 유도형 모형으로 식 (10)처럼 선형화될 수 있고, 이러한 조건하에서 기업투자는 한계이윤( $MPK$ ), 현금흐름( $CF/K$ )의 함수로 표현된다.  $MPK$ 는 일반적으로 토빈 $q$ 와 매출비중( $S/K$ )을 이용한다.<sup>4)</sup>

3) 식(8)에서는 1계 테일러 근사에 따른 상수항이 포함되어야 하지만, 대부분의 논문들에서 계수의 추정과 해석을 단순화하기 위하여 상수항을 무시한다(Harrison, Love and McMillan, 2001).

4) 토빈 $q$ 를 이용할 경우 기업투자가 미래  $MPK$ 에 대한 정보를 포함하기 마련인 현금흐름에 민감해질 가능성이 있다는 주장에 따라 매출비중을 포함하여 분석하여 분석하였으나 결과에는 유의한 차이를 보이지 않았다.

따라서 본 논문에서는 토빈q와 현금흐름(*CF*) 이외에 기업의 레버리지(총부채(*TB*), 장기차입금(*LB*), 총차입금(*TLB*)), 그리고 투자와 레버리지가 기업군들 간에 차이가 있는가를 분석하기 위해 각 기업의 더미변수를 레버리지 변수에 곱하여 추정한다.

$$\frac{I_{i,t}}{K_{i,t-1}} = \alpha + \beta \left( \frac{I_{i,t-1}}{K_{i,t-2}} \right) + LEVERAGE_{i,t-1} + \delta Q_{i,t-1} + \gamma \left( \frac{CF_{i,t}}{K_{i,t-1}} \right) + f_i + d_t + e_{i,t} \quad (10)$$

$f_i$ 는 개별기업효과(firm-specific effect),  $d_t$ 는 시간효과(time-specific effect),  $e_{i,t}$ 는 순수오차항을 나타낸다.

## 2. 자료 및 변수

기업의 레버리지가 투자결정에 미치는 영향을 추정하기 위해서는 기업의 재무관련 데이터베이스를 이용하여야 한다. 실증분석 자료는 한국신용평가(주)의 재무자료이며 제조기업만을 분석대상으로 선정하였다.<sup>5)</sup> 추정기간은 1981년부터 2002년이며 기업별로 기간이 상이한 자료이다. 따라서 분석에 이용한 기업패널자료는 불균형패널자료(unbalanced panel data)이다. 관측기간이 동일한 기업만을 이용하는 균형패널자료(balanced panel data)를 이용할 경우 절반 이상의 기업이 실증분석에서 제외되어 이용 가능한 정보를 과소 이용하는 결과를 초래한다. 그러므로 1981~2002년 기간 동안 7년 연속기간을 갖는 389개 제조업의 불균형패널자료이다.<sup>6)</sup> 전체표본의 기업자료 수는 7,244개이다.

분석에 이용된 변수는 다음과 같다. 종속변수인 투자(*I*)는 *t*기의 자본지출(capital expenditure)이며 재무상태변동표와 현금흐름표 항목 중에서 토지취득분을 제외한 유형고정자산의 증가(취득)항목을 이용하였다. 내부자금을 나타내

5) 표준산업분류 중에서 제조업(D)에 속한 기업으로 코드분류가 15~37인 기업이다.

6) 분석기간 중 결산 월이 변경된 기업 및 법정관리, 부도기업은 제외하였으며 이상치(outliers)는 Carpenter et al.(1998)에 따라 자료집합에서 상위(하위) 0.1%에 있는 변수를 갖는 기업들은 제외하였다.

는 현금흐름(cash flow,  $CF$ ) 변수는  $t$ 년도의 법인세가 무시된 영업이익과 감가상각비의 합으로 계산하였으며 토빈 $q$  비율( $Q$ )은  $t$ 기초 총부채의 장부가치와 ( $t-1$ 기말 발행주식수 $\times t-1$ 기말 주식가격)의 합을  $t-1$ 기의 총자산으로 표준화하였다. 레버리지를 나타내는 대리변수로는 3가지 변수인 총부채, 장기차입금, 총차입금을 이용하였다. 총부채( $TB$ )는 고정부채와 유동부채의 합계이고 장기차입금( $LB$ )은 대차대조표 항목인 장기차입금, 외화장기차입금, 차관의 합계이다. 또한 총차입금( $TLB$ )은  $LB$ 와 단기차입금, 유동성장기차입금, 유동성외화장기차입의 합계를 나타낸다. 토빈 $q$  비율을 제외한 모든 변수는  $t-1$ 의 총자산으로 표준화함으로써 규모효과를 제거하였다.

본 연구에서는 레버리지와 투자지출의 관계를 투자기회가 높은 기업과 낮은 기업으로 분류하여 살펴본다. 이를 위하여  $q$  비율의 대용변수를 기준으로 이 비율이 1보다 크면 투자기회가 많은 기업으로 보고 1보다 작으면 투자기회가 적은 기업으로 분류하였다. 토빈 $q$  비율이 높은 기업과 낮은 기업으로 구분한 이유는 토빈 $q$ 가 자본시장에 대한 접근 용이성에 대한 대리변수로서 작용할 수 있기 때문이다.  $q$  비율이 높은 기업은 현금흐름과 순가치(net worth)가 더 높을 것으로 예상되기 때문에 자본시장에서 신용을 공급받을 때 도덕적 해이(moral hazard)와 역선택(adverse selection) 문제가 줄어들 것이다. 이러한 기업들은 높은 성장전망을 갖고 있기 때문에 자본시장에서 자금을 보충하거나 자본구성을 변경하기가 용이할 것이다. 따라서 투자에 대한 레버리지의 제약이 적을 것이다. 그러나 낮은  $q$  비율을 갖는 기업들은 성장전망이 낮기 때문에 자본구성을 변화시키기가 쉽지 않다. 이로 인해 레버리지가 투자를 더 엄격하게 제약할 것이다.

또한 기업의 미래 성장성에 관한 지표(indicators concerning growth)로 이용하고 있는 매출액증가율과 총자산증가율을 기준으로 기업을 분류하였다. 매출액증가율은 전년도 매출액에 대한 당해연도 매출액의 증가율로서 기업의 외형적 성장세를 판단하는 대표적 지표이다. 경쟁기업보다 빠른 매출액증가율은 결국 시장점유율의 증가를 의미하므로 경쟁력 변화를 나타내는 척도가 된다. 총자산증가율은 기업에 투자 운용된 총자산이 당해연도에 얼마나 증가하였는

가를 나타내는 비율로서 기업의 전체적인 성장척도를 측정하는 지표이다. 따라서 추정기간 동안 평균 매출액 증가율(또는 총자산증가율)이 상위 75%인 기업과 하위 25%인 기업군으로 구분하여 미래성장성이 낮은 기업과 높은 기업군에 차이가 있는가를 분석하였다.<sup>7)</sup>

<표 1>에는 본 연구에서 사용하고 있는 주요변수에 대한 요약통계량을 제시하였다.

투자지출의 평균은 투자기회가 많은 기업( $q > 1$ )과 투자기회가 적은 기업( $q < 1$ )이 큰 차이가 없으나 미래성장지표인 매출액 증가율과 총자산증가율이 높은 상위 75% 기업이 하위 25% 기업보다 상대적으로 높음을 알 수 있다. 현금흐름은 성장성이 높은 기업이 더 높고 부채비율(총부채, 장기차입금) 또한 더 높게 나타났다.

<표 1> 표본기업의 요약통계량(평균)

	$I_t/TA_{t-1}$	$CF_t/TA_{t-1}$	$Q_{t-1}$	$(TB/TA)_{t-1}$	$(LB/TA)_{t-1}$	$(TLB/TA)_{t-1}$
전체기업 (389개)	0.069 (0.179)	0.129 (0.049)	0.928 (0.179)	0.649 (0.134)	0.078 (0.058)	0.270 (0.102)
$q > 1$ (131개)	0.071 (0.045)	0.124 (0.049)	1.118 (0.098)	0.679 (0.135)	0.082 (0.070)	0.288 (0.094)
$q < 1$ (258개)	0.069 (0.039)	0.133 (0.039)	0.830 (0.126)	0.628 (0.131)	0.076 (0.051)	0.259 (0.101)
매출증가율 상위 75%(98)	0.094 (0.050)	0.146 (0.057)	0.909 (0.188)	0.649 (0.130)	0.086 (0.055)	0.262 (0.091)
매출증가율 하위 25%(97)	0.051 (0.027)	0.109 (0.037)	0.937 (0.182)	0.656 (0.147)	0.075 (0.072)	0.285 (0.125)
총자산증가율 상위 75%(98)	0.120 (0.132)	0.155 (0.127)	1.126 (1.437)	0.682 (0.982)	0.113 (0.329)	0.271 (0.354)
총자산증가율 하위 25%(97)	0.080 (0.108)	0.117 (0.084)	1.082 (0.652)	0.653 (0.243)	0.096 (0.131)	0.294 (0.212)

주 : ( )는 표준오차임.

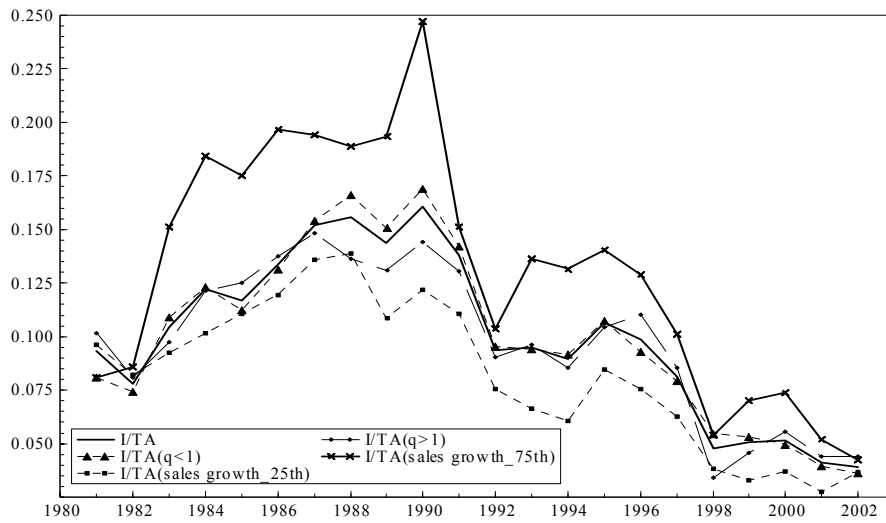
$I_t/TA_{t-1}$ : 총투자/총자산,  $CF_t/TA_{t-1}$ : 현금흐름/총자산,  $Q_{t-1}$ : q비율

$(TB/TA)_{t-1}$ : 총부채/총자산,  $(LB/TA)_{t-1}$ : 장기차입금/총자산,  $(TLB/TA)_{t-1}$ : 총차입금/총자산

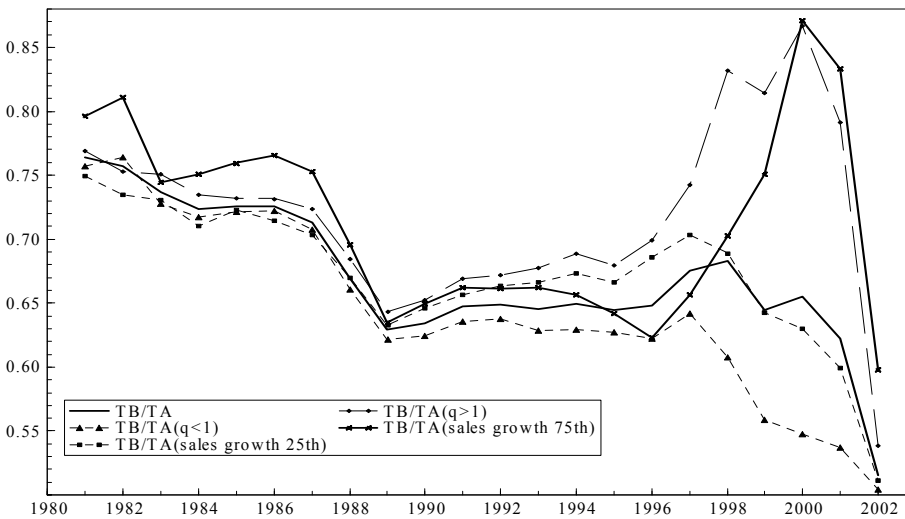
7) 기존의 국내연구들은 주로 재벌기업과 비재벌기업, 대기업과 중소기업을 기준으로 분석하고 있다. 이와 관련된 최근 연구로는 이병기(2000), 신선우·이훈현(2002), 신선우(2003a, 2003b) Shin(2003), 전용수·임태순(2000) 등을 들 수 있다.

분석에 이용된 각 기업군에 대한 투자지출과 총부채의 연도별 추이를 [그림 1]과 [그림 2]에 제시하였다.

[그림 1] 연도별 투자비중의 평균 추이



[그림 2] 연도별 총부채비중의 평균 추이



이러한 추이는 각 연도별 소속기업들의 중위수를 연도별로 평균한 값이다. 그림에서 볼 수 있듯이 투자지출과 레버리지가 음(-)의 관련성을 갖고 있음을 알 수 있다. 특히 매출증가율을 기준으로 볼 때 상위 75%에 속한 기업은 여타 기업에 비해 투자율이 가장 높고 부채비율 또한 높음을 알 수 있다. 외환위기 이후에 투자율은 급격히 감소하고 있지만 q 비율이 높은 기업과 매출증가율 상위 75%기업의 부채는 2000년까지 높은 증가추세를 보이고 있다.

### 3. 추정방법

본 논문에서 이용하는 자료는 불균형패널자료이고 GMM(Generalized Methods of Moments)을 이용하여 분석하였다.<sup>8)</sup> WG(within-group) OLS추정량은 설명변수가 오차항과 상관되어 있지 않다고 가정하기 때문에 심각한 결점을 가지고 있다. 설명변수가 오차항과 상관되어 있다면 그룹내 변동 추정량은 편의(bias)를 갖게 되고 일치추정치를 얻지 못한다. 동태적 투자모형이 식 (11)과 같을 경우에 OLS 추정량이 필연적으로 문제가 발생할 수 있다는 것은 아래와 같이 설명할 수 있다.

$$\left(\frac{I}{K}\right)_{it} = \alpha'z_{i,t} + \gamma\left(\frac{I}{K}\right)_{i,t-1} + f_i + \epsilon_{i,t}, \quad (11)$$

$f_i$  : 관측 불가능한 기업효과

$\left(\frac{I}{K}\right)_i$ 가  $f_i$ 의 함수이기 때문에  $\left(\frac{I}{K}\right)_{i-1}$ 도  $f_i$ 의 함수이다. 따라서  $\left(\frac{I}{K}\right)_{i-1}$ 는 오차항과 상관되고 투자모형이 수준변수로 추정될 경우에 OLS 추정량은 심각한 편의를 갖게 된다. 이러한 문제는 고정효과(fixed effect)모형을 통해서도 해결되지 않는다. 고정효과의 추정식은 식 (12)와 같다.

8) 자세한 내용은 Arellano and Bond(1991), Blundell, Bond, Devereux, and Schiantarelli (1992), Arellano and Bover(1995)을 참조.

$$\left[ \left( \frac{I}{K} \right)_{it} - \left( \bar{\frac{I}{K}} \right)_{it} \right] = \alpha' (z_{it} - \bar{z}_i) + \gamma \left[ \left( \frac{I}{K} \right)_{it-1} - \left( \bar{\frac{I}{K}} \right)_{it-1} \right] + (e_{it} - \bar{e}_{it}), \quad (12)$$

( $\bar{\cdot}$ )는 변수평균이며  $\bar{e}_{it}$ 는  $\left( \frac{I}{K} \right)_{it-1}$  과 상관되어 있는  $e_{it-1}$ 을 포함하는 평균이기 때문에  $\left( \frac{I}{K} \right)_{it-1}$  는  $\bar{e}_{it}$  상관관계를 갖는다. 따라서  $\left[ \left( \frac{I}{K} \right)_{it-1} - \left( \bar{\frac{I}{K}} \right)_{it-1} \right]$ 는  $(e_{it} - \bar{e}_{it})$ 와 상관되게 된다.

기본적으로 식 (11)은 종속변수의 시차변수가 설명변수로 이용된 모형이다. Baltagi(1995, pp.125~126)에 의하면 시차종속변수가 설명변수로 이용될 때 설명변수인  $z_{i,t}$ 가 강외생적(strictly exogenous)인 변수라 할지라도 WG(within group)방법과 random effects 추정량은 편의(biased)를 갖는 비일치(inconsistent) 추정량이 된다. 또한 OLS추정량도 관측 불가능한 기업효과(firm specific effect)를 생략하고 있기 때문에 문제가 발생한다. 특히  $\gamma$ 에 대한 OLS 추정치는 관측불가능한 기업효과와 시차종속변수가 양(+)의 상관관계가 존재하기 때문에 상향편의(upward-biased)를 갖게 되고, WG추정치는 within-transformed 오차항과 within-transformed 시차종속변수가 음(-)의 상관관계를 갖기 때문에 하향편의(downward-biased)를 갖게 된다.

이러한 이유 때문에 기본적으로 최소자승법을 이용하는 연구는 시차종속변수를 포함해서는 안 된다.<sup>9)</sup> 기본적으로 투자결정은 동태적 측면이 있기 때문에 투자율이 자기상관성을 가지고 있다.<sup>10)</sup> 많은 실증연구들이 시차종속변수를 설명변수로 사용하고 있으나 이러한 분석은 다른 추정기법을 필요로 한다. 더군다나 다른 설명변수들이 내생적이라면 추정기법은 달라져야 한다. 토빈 Q 투자모형을 추정할 경우에 Q 변수가 오차항과 상관되어 있을 가능성이 높다. Hayashi and Inoue(1991)는 기업의 산출량과 현금흐름 같은 변수들 또한 기술

9) 김지수·조정일(2000)는 단순한 패널 ols를 이용하면서 종속변수인 투자의 시차변수를 설명변수에 포함하여 추정하고 있다.

10) 또한 시차종속변수가 없는 투자모형은 설명변수가 오차항과 상관될 수밖에 없기 때문이다.

충격에 의존하고 내생적이라고 주장한다. 즉 모형 내 대부분의 설명변수들이 종속변수와 연립적으로 결정되든지 또는 종속변수와 양방향(two-way) 인과관계를 갖게 된다. 따라서 이러한 설명변수의 내생성을 통제하고 일치추정량을 얻기 위해 도구변수추정법(IV)을 이용하게 된다.

식 (11)과 같은 경우에 편의가 없는 일치추정량을 얻기 위해서는 2가지 방법이 이용될 수 있다.

첫째, 동태적 패널모형을 위한 일치추정 기법을 처음으로 제안한 Anderson and Hsiao (1982)의 방법을 따르는 것이다. 이들의 방법은 도구변수를 갖는 1차 차분된 2SLS 방법이다. 1차 차분을 함으로써  $f_i$ 가 없어지며,  $\left(\frac{I}{K}\right)_{it-1}$ 에 대한 도구변수로서  $\left(\frac{I}{K}\right)_{it-2}$ 나  $\Delta\left(\frac{I}{K}\right)_{it-2}$ 을 이용한다. 만약  $\epsilon_{i,t}$ 가 계열 상관되지 않는다면 두 가지 도구변수는  $\Delta\left(\frac{I}{K}\right)_{it-1}$ 과는 상관관계가 존재하지만  $\Delta\epsilon_{i,t}$ 와는 상관관계가 존재하지 않는다. 추정은 2SLS에 의해서 수행되지만 Ahn and Schmidt(1995)에 의하면 이러한 IV 기법은 이용가능한 모든 적률조건을 사용하지 않고 있고 잔차 변동의 다른 구조를 고려하고 있지 않기 때문에 효율적이지는 않음을 보였다.<sup>11)</sup>

둘째, 이러한 비판을 해결하기 위해 Arellano and Bond(1991)가 GMM 기법을 이용하여 선형 적률제약을 부과하는 최적의 동태적 패널 추정량을 제안하였다. 최근 동태적 패널모형을 상정하는 거의 모든 연구들이 이들의 방법을 이용하여 분석하고 있다. Arellano and Bond dynamic panel 추정량(GMM-DIF)은 1차 차분된 2SLS 추정량보다 더 효율적이라는 것은 이미 알려진 사실이다. 즉 Anderson and Hsiao (1982)의 IV 추정량보다 훨씬 작은 분산을 제공한다는 것이 증명되었다.

Arellano and Bond(1991) 모형은  $\Delta\left(\frac{I}{K}\right)_{it-1}$ 의 도구변수로서 종속변수의 수준 시차변수들( $\left(\frac{I}{K}\right)_{i,t}$ ,  $\left(\frac{I}{K}\right)_{i,t+1}$ , ...,  $\left(\frac{I}{K}\right)_{i,t-2}$ )을 이용한다. 그러나 Blundell

11) 그렇지만 일치추정량은 제공한다고 제시하였다.

and Bond(1998,1999)에 의하면  $\gamma$ 의 값이 크고 지속성을 갖거나 일시적인 충격인  $\epsilon_{it}$ 와 개별기업의 특수한 효과인  $f_i$ 의 상대적 분산( $\frac{\sigma_f^2}{\sigma_\epsilon^2}$ )이 크다면 GMM-DIF 모형의 도구변수는 타당성에 문제가 발생한다(weak instruments). 이들은 이러한 문제점은 System GMM을 이용함으로써 해결될 수 있음을 보였다. 이러한 추정상의 문제점 때문에 본 연구에서는 Arellano and Bond(1998)가 고안한 system-GMM(generalized methods of moments)기법을 이용하여 분석한다. 이러한 적률(moment)추정방법은 회귀계수의 적률제약(moment restriction)에서 유도된다.<sup>12)</sup> system GMM은 두 개의 방정식을 결합하여 추정한다. 이 방법은 수준(level) 회귀식( $(\frac{I}{K})_{it} = \alpha'z_{it} + \gamma(\frac{I}{K})_{it-1} + f_i + e_{it}$ )과 1차 차분(first difference) 회귀식( $\Delta(\frac{I}{K})_{it} = \alpha'\Delta z_{it} + \gamma\Delta(\frac{I}{K})_{it-1} + f_i + \Delta e_{it}$ )을 하나의 시스템으로 결합하여 구성된다.

만일 오차항이 기업들 간에 독립이고 계열 상관되어 있지 않다면 차분방정식에서 시차종속변수에 대한 타당한 도구변수는 식 (13)과 같은 적률조건에서 선택된다.

$$E\left[\left(\frac{I}{K}\right)_{i,t-s} (e_{i,t} - e_{i,t-1})\right] = 0, \quad s \geq 2; \quad t = 3, \dots, T \quad (13)$$

따라서 1차 차분투자모형에서 도구변수는  $(\frac{I}{K})_{it}$ 의 2기 이상 시차변수가 타당하다.<sup>13)</sup> 다른 설명변수( $z_{ijt}$ )가 외생적(exogenous)이라면  $z_{ijt}$ 의 모든 과거, 현재, 미래값이 도구변수로 타당하다. 그러나 앞에서 언급한 것처럼 다른 회귀변수들이 내생적이라고 판단할 수 있는 이유는 Arellano and Bond(1998)가 차분방정식을 위한 적률조건이 식 (14)와 같다고 제안하였기 때문이다.

$$E[z_{i,t-s}(e_{i,t} - e_{i,t-1})] = 0, \quad s \geq 2; \quad t = 3, \dots, T \quad (14)$$

식 (14)가 의미하는 것은  $z_{i,t}$ 가 내생적이라면 2기 시차 이상의 값이 도구변

12) 즉 회귀변수와 오차항간의 공분산에 대한 제약을 말한다.

13) 일반적으로  $(\frac{I}{K})_{i,t-2}$ 와 초기값은  $\Delta e_{it}$ 와 상관되지 않기 때문이다.

수로서 타당하다는 것이다. 수준방정식은 1차 차분변수가 타당한 도구변수로 이용될 수 있다. 그러나 내생적인 회귀변수를 갖는 투자모형에서는 너무 많은 도구변수가 이용되기 때문에 심각한 편의 추정치를 초래할 수 있다. 투자모형이 시차종속변수를 포함하고 있고 모형 내 다른 회귀변수가 내생적이라면 수준방정식에 이용될 수 있는 적률조건은 식 (15)와 같다고 Arellano and Bond(1998)는 제안하였다.

$$E\left[\Delta\left(\frac{I}{K}\right)_{i,t-1}(f_i - e_{i,t})\right] = 0$$

$$E[\Delta z_{i,t-1}(f_i + e_{i,t})] = 0 \quad (15)$$

정리하면 1차 차분 회귀식에는 설명변수의 수준시차 변수를 도구변수로 이용하고 수준 회귀식에서는 설명변수의 차분시차 변수를 도구변수로 이용한다. 적절한 도구변수가 채택된다면 설명변수와 기업특정효과(individual-specific effect) 간의 상관관계가 시간에 따라 불변이다. system GMM 추정절차의 신뢰성은 도구변수의 타당성에 매우 의존한다.

도구변수는 다음과 같은 조건하에서 적절히 선택될 수 있다. 첫째, 오차항이 계열상관을 보이지 않거나 최소한 MA(1) 과정을 가져야 한다. 둘째,  $t$ 기의 설명변수가 종속변수의 현재 또는 과거 실현치(realization)에 의해서는 영향을 받을지라도 종속변수의 미래 충격(innovation)에 의해서는 영향을 받지 않아야 한다. 이러한 가정의 타당성은 2가지 분석을 통해 통계적으로 검증될 수 있다.

첫째, 과도식별제약(overidentifying restrictions)에 대한 Sargan 검정으로서 도구변수가 적합하게 도입되었는가를 검정하는 방법이다.<sup>14)</sup> 둘째, 회귀 잔차(regression residuals)에 대한 계열상관(serial correlation)검정이다. 계열상관이 없다는 것은 모든 시차설명변수가 도구변수로 이용될 수 있다는 것을 가리킨

14) Sargan test는 과도식별제약에 대한 검정으로 접근적으로  $\chi^2$ 분포를 따르며 도구변수가 타당하다는 귀무가설을 갖는다. p-value가 0.05보다 클수록 도구변수가 타당하다는 것을 의미한다.

다. 또한 구조모형을 추정할 때 개별 기업 간의 투자행태의 차이는 관찰되지 않는 기업특정효과(unobserved individual effect)의 존재에 의해 반영되는 이질성문제를 초래하게 된다. Hsiao and Tahmiscioglu(1997)는 횡단면 자료와 시계열 자료를 결합한(pooling)자료는 적합한 추정기법을 이용하고 사전 분류 기준에 따라 기업을 분류(grouping)하면 이러한 이질성문제를 제거하는 데 도움이 된다고 주장하였다. 만약 관찰되지 않는 기업특정효과가 회귀식에 나타난다면 잔차항은 지속적인(persistent) 계열상관을 갖게 된다. 이것은 1차 차분된 잔차항의 계열자기상관을 검토했으로써 검증할 수 있다. 잔차항이 1차 차분된 회귀식에서 조사되기 때문에 MA(2) 이상의 계열상관만이 판단의 근거가 된다.

### III. 실증분석결과

#### 1. 전체 분석결과

본 연구에서는 식 (10)을 변용하여 1981~2002년 기간 동안 389개의 불균형 제조업 패널자료를 이용하여 system GMM추정방법으로 분석하였다. 본 모형의 추정에 앞서 기존의 OLS 모형과의 차이점을 알아보기 위해 OLS와 1차 차분 OLS를 추정한 추정치를 <표 2>에 제시하였다. 그러나 앞에서 언급한 바와 같이 OLS 추정량은 필연적으로 시차종속변수를 포함해서는 안 되기 때문에 시차종속변수를 제외한 결과와 기업의 관측불가능한 효과를 제거하기 위한 1차 차분 추정결과도 제시하였다. OLS 결과와 OLS-diff 결과를 비교하여 볼 때 관측 불가능한 효과를 제거하느냐 하지 않느냐에 따라 회귀계수의 추정치가 심하게 달라짐을 알 수 있다.

&lt;표 2&gt; 전체기업에 대한 투자모형(OLS)

변 수	$Lverage = (TB/TA)_{t-1}$		$Lverage = (LB/TA)_{t-1}$		$Lverage = (TLB/TA)_{t-1}$	
	OLS	OLS-diff	OLS	OLS-diff	OLS	OLS-diff
<i>Intercept</i>	0.030*** (0.008)	0.011 (0.008)	0.030*** (0.009)	0.010 (0.008)	0.032*** (0.008)	0.010 (0.008)
<i>Lverage</i>	-0.006* (0.003)	-0.035** (0.016)	0.016 (0.013)	-0.125*** (0.048)	-0.012 (0.007)	-0.108*** (0.028)
<i>Tobin's <math>Q_{t-1}</math></i>	0.007** (0.003)	0.008** (0.003)	0.003 (0.003)	0.008** (0.003)	0.006*** (0.002)	0.009** (0.003)
$CF_t/TA_{t-1}$	0.304*** (0.029)	0.204*** (0.047)	0.307*** (0.029)	0.204*** (0.045)	0.304*** (0.029)	0.207*** (0.045)
$R^2$	0.125	0.026	0.125	0.033	0.125	0.036
m1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
m2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

주: 1) ( )은 표준오차 값임. \*\*\*, \*\*, \*는 각각 1%, 5%, 10% 유의수준. 2) 모든 방정식에 연도더미를 포함시킴. 3) m1, m2는 잔차의 1, 2차 시계열상관 검증치이며 시계열자기상관이 없다는 귀무가설하에서  $N(0, 1)$ 의 정규분포를 함.

이것은 일반적인 패널분석에서 관측불가능한 효과를 통제해야 한다는 기존의 이론 및 연구결과들과 받아들여야 하는 것으로서 우리나라 기업 자료에서도 기업의 특성이 중요하다는 것을 의미한다. 그러나 이들 두 추정방법도 오차항에 자기상관성이 없다는 귀무가설을 1% 유의수준에서 기각함으로써 오차항의 계열상관이 추정치에 영향을 미침을 알 수 있다. 이러한 계열상관은 오차항의 시차변수를 더 고려하더라도 해결되지 않았다. 따라서 오차항의 계열상관 문제와 관측불가능한 기업효과, 더 나아가 변수들 간의 내생성문제를 모두 고려하는 system GMM 방법을 이용할 필요가 있다고 판단된다.

<표 3> 전체기업에 대한 투자모형(SYS-GMM)

변 수	SYS-GMM	SYS-GMM	SYS-GMM
	$Lverage = (TB/TA)_{t-1}$	$Lverage = (LB/TA)_{t-1}$	$Lverage = (TLB/TA)_{t-1}$
<i>Intercept</i>	0.016 (0.013)	0.017 (0.013)	0.022 (0.014)
$I_{t-1}/TA_{t-2}$	0.161*** (0.046)	0.172*** (0.042)	0.169*** (0.040)
<i>Lverage</i>	-0.009*** (0.003)	-0.026*** (0.009)	-0.039*** (0.009)
<i>Tobin's Q</i> <sub>t-1</sub>	0.010*** (0.003)	0.008*** (0.002)	0.011*** (0.002)
$CF_t/TA_{t-1}$	0.303*** (0.050)	0.268*** (0.049)	0.283*** (0.052)
m1(p-값)	0.000	0.000	0.000
m2(p-값)	0.170	0.196	0.190
Sargan(p-값)	0.343	0.195	0.078

주: 1) ( )은 표준오차 값임. \*\*\*, \*\*, \*는 각각 1%, 5%, 10% 유의수준. 2) 모든 방정식에 연도더미를 포함시킴. 3) m2는 잔차의 2차 시계열상관 검증치이며 시계열자기상관이 없다는 귀무가설하에서  $N(0, 1)$ 의 정규분포를 함. 4) Sargan은 과도식별제약에 대한 검증치이며  $\chi^2(k)$ 분포를 따름. 5) 차분방정식의 도구변수는 모든 설명변수의 t-2, t-3, t-4이고 수준방정식의 도구변수는  $\Delta t-1$ 을 적용함.

<표 3>에는 종속변수의 1기 시차 값과 레버리지, 토빈Q, 현금흐름 비율의 추정결과가 제시되었다. 모형을 추정하는 과정에서 많은 도구변수를 이용한 결과 차분방정식의 도구변수는 모든 설명변수의 t-2, t-3, t-4 시차가 가장 적합하고 수준방정식의 도구변수는 1차 차분 시차가 적합한 것으로 선택되었다. 도구변수들이 타당하다는 과도식별제약(over-identifying restriction)을 검증하는 Sargan검정을 통과함으로써 추정모형이 올바르게 설정되었음을 알 수 있다. 또한 오차항의 2차 계열상관의 여부를 판단하는 m2의 p값이 0.05보다 크므로 추정치들이 통계적 유의성을 갖는다고 판단할 수 있다.

<표 3>에 제시된 실증분석결과는 이론적인 기대에 부합하는 결과를 보여주고 있다. 전체기업의 분석결과를 살펴보면, 기업의 투자기회를 나타내는  $Q_{t-1}$ 이 약 0.01값을 나타내며 통계적으로 유의함을 알 수 있다. 즉 투자기회가 기

업투자에 긍정적인 영향을 미치고 있다. 또한 투자가 전기 투자에 의해 영향을 받고 있음을 보여준다. 그리고 기업투자가 자금제약에 직면하지 않는다면 현금흐름( $CF_t/TA_{t-1}$ )은 투자에 음(-)의 영향을 미치거나 통계적으로 유의하지 않을 것이다. 그러나 기업투자에 자금제약이 존재한다면 통계적으로 유의한 양(+)의 영향을 미치게 된다. 본 연구 결과는 현금흐름( $CF_t/TA_{t-1}$ )이 기업투자를 설명하는 데 상당히 영향이 큰 것으로 나타났다. 통계적으로 유의한 0.268에서 0.303의 값을 나타냄으로써 분석대상기업들이 자금제약에 직면하고 있음을 암시한다. 이것은 기업투자가 내부자금의 영향을 받고 있다는 점을 시사함으로써 좋은 투자안을 가지고 있어도 자금을 조달할 수 없는 경우가 발생할 수 있어 내부자금의 확보 여부가 투자결정에 중요한 요소가 될 수 있다는 것이다. 레버리지가 투자지출에 미치는 영향은 본 연구의 주된 관심사이다. 따라서 결과의 강건성(robust)을 위해 세 가지 지표를 이용하여 분석하였다. 총부채( $(TB/TA)_{t-1}$ )와 장기차입금( $(LB/TA)_{t-1}$ ), 총차입금( $(TLB/TA)_{t-1}$ )으로 구분하여 모형을 추정한 결과 레버리지의 증가는 이론이 예측하는 바와 같이 투자지출에 음(-)의 영향을 미친다. 이는 레버리지의 상승이 파산비용의 증가를 가져와 투자를 감소시키는 기업의 자금조달 행태를 반영한다고 볼 수 있다<sup>15)</sup>. 즉 부채비율이 계속 상승하면 파산 가능성이 높아지게 되며, 파산이 발생하게 되면 직·간접적인 파산비용으로 인해 기업의 가치가 하락하게 된다. 따라서 합리적인 경영자는 파산비용이 증가할 경우 부채비율을 축소해야 하며 이에 따라 파산비용이 증가할수록 부채비율이 하락하게 된다는 것으로 선우석호(1990)의 연구결과와 일치함을 알 수 있다.

1997년 말 외환위기 이후 정부주도하의 기업부채비율 축소방침이 기업개혁과제의 일환으로 실행되었다. 정부는 기업의 재무구조 개선, 부채비율 축소를

15) 윤봉한·오규택(1999)과 김지수·정기웅(2000)의 결과와는 달리 1차차분 GMM분석을 이용한 이병기(2000)는 총부채비율이 투자증가와 음의 관계가 있음을 밝힌 바 있다.

기업구조조정의 최우선 과제로 상정하고 1998년말까지 부채비율 200%라는 목표를 제시하였다. 또한 1997년말 기업의 연쇄도산으로 은행들의 부실화가 심화되자 은행들도 대출비중을 축소하는 경향을 나타냈다. 최근에 이러한 현상은 기업에게 필요한 자금을 금융기관이 충분히 공급하지 못하는 결과를 초래함으로써 결국엔 기업투자 감소, 실업증가 등 경제활동의 침체를 초래하였다는 견해들이 존재한다. 이러한 지적은 레버리지의 투자에 대한 영향이 정(+)의 관계인지, 부(-)의 관계인지의 여부에 관한 해석으로 귀결될 수 있다. 따라서 외환위기 이전과 이후에 레버리지가 기업의 투자형태에 미치는 영향이 달라지는가를 분석하였다. <표 4>와 <표 5>는 각각 외환위기 이전과 이후의 투자합수에 대한 추정결과를 보이고 있다. 위기 전과 비교하였을 때 위기 후에 현금흐름에 대한 민감성은 줄어들었다. 이는 위기 이후 금융기관의 구조조정을 통한 효율성의 증대로 인해 정보의 비대칭 현상이 감소하고 있다고 판단할 수 있다. 그리고 레버리지의 영향은 이론과 일치하게 모두 투자지출과 음(-)의 관계를 나타내고 있다. 그러나 이러한 음의 관계가 기업의 과도한 차입과 상환능력 부재에 따른 위기 초래라는 본질적인 문제 해결책으로서의 부채비율 축소라는 정책이 갖는 효과를 부정할 수는 없다고 본다. 외환위기 이후 나타난 기업들의 투자 감소는 부채비율 감축 등의 강제적인 정책집행에 따른 부분에 기인하는 측면이 있지만 보다 근본적으로는 기업들의 투자를 지속적으로 증가시킬만한 투자안의 감소, 즉 투자에 대한 불확실성의 증가에 기인하는 것으로 보는 것이 타당하다고 판단된다. 물론 기업의 투자의욕을 증가시키기 위한 수단으로서 기업규제의 완화 등 제반의 조치에 대한 검토와 외환위기라는 한시적인 상황하에서 실시된 정책이라는 측면에서 재검토되어야 할 필요는 있다고 판단된다.

&lt;표 4&gt; 전체기업에 대한 투자모형: 외환위기 이전 기간 (1981~1997)

변 수	SYS-GMM	SYS-GMM	SYS-GMM
	$Lverage = (TB/TA)_{t-1}$	$Lverage = (LB/TA)_{t-1}$	$Lverage = (TLB/TA)_{t-1}$
<i>Intercept</i>	0.031 (0.022)	0.018 (0.021)	0.068** (0.027)
$I_{t-1}/TA_{t-2}$	0.149*** (0.044)	0.156*** (0.043)	0.154*** (0.040)
<i>Lverage</i>	-0.032 (0.024)	-0.065* (0.036)	-0.128*** (0.009)
<i>Tobin's Q</i> <sub>t-1</sub>	0.009** (0.003)	0.006* (0.003)	0.005 (0.003)
$CF_t/TA_{t-1}$	0.338*** (0.063)	0.309*** (0.075)	0.290*** (0.069)
m1(p-값)	0.000	0.000	0.000
m2(p-값)	0.208	0.220	0.227
Sargan(p-값)	0.062	0.141	0.118

주: 1), 2), 3), 4)는 <표 2>의 주와 동일함. 5) 차분방정식의 도구변수는 모든 설명변수의 t-2, t-3, t-4, t-5이고 수준방정식의 도구변수는  $\Delta t-1$ 을 적용함.

&lt;표 5&gt; 전체기업에 대한 투자모형: 외환위기 이후 기간 (1998~2002)

변 수	SYS-GMM	SYS-GMM	SYS-GMM
	$Lverage = (TB/TA)_{t-1}$	$Lverage = (LB/TA)_{t-1}$	$Lverage = (TLB/TA)_{t-1}$
<i>Intercept</i>	0.020*** (0.005)	0.016 (0.005)	0.023** (0.005)
$I_{t-1}/TA_{t-2}$	0.306*** (0.048)	0.301*** (0.048)	0.308*** (0.051)
<i>Lverage</i>	-0.014** (0.007)	-0.024** (0.010)	-0.016** (0.008)
<i>Tobin's Q</i> <sub>t-1</sub>	0.014** (0.007)	0.008** (0.003)	0.006** (0.003)
$CF_t/TA_{t-1}$	0.101** (0.040)	0.142*** (0.033)	0.092*** (0.037)
m1(p-값)	0.000	0.000	0.000
m2(p-값)	0.508	0.623	0.537
Sargan(p-값)	0.199	0.265	0.384

주: 1), 2), 3), 4)는 <표 2>의 주와 동일함. 5) 차분방정식의 도구변수는 모든 설명변수의 t-2, t-3, t-4이고 수준방정식의 도구변수는  $\Delta t-1$ 을 적용함.

## 2. 기업분류에 따른 분석결과

토빈q를 기준으로 구분하여 추정한 결과가 <표 6>이다. *HighQ*는 토빈q 비율이 1보다 큰 기업은 1의 값, 그 외의 기업은 0의 값을 부여한 더미변수이며 *LowQ*는 토빈q 비율이 1보다 작은 기업은 1의 값, 그 외의 기업은 0의 값을 부여한 더미변수이다. 두 개의 더미변수를 각각 레버리지와 곱하여 분석함으로써 한 모형 내에서 두 기업군간의 차이를 분석할 수 있다. 이에 따르면 전체모형에서 이전 분석결과와 마찬가지로 금기의 기업투자는 전기의 기업투자에 많은 영향을 받고 있고 현금흐름 민감성이 0.265-0.3의 값을 보임으로써 투자에 내부자금이 중요한 결정요인임을 확인할 수 있다. 투자기회가 높은 즉 *HighQ*는 레버리지가 기업투자에 음(-)의 영향을 미치나 통계적으로 유의하지는 않다. 그러나 *LowQ*는 레버리지가 기업투자에 미치는 영향이 통계적으로 유의한 음(-)의 값을 나타내며 그 계수 값 또한 상대적으로 높음을 알 수 있다. 특히 총차입금을 기준으로 한 부채비율의 영향력이 더 크다. 두 기업군 간에 레버리지의 계수가 통계적으로 유의한 차이가 존재하는가를 알아보기 위해 Wald 검정 결과를 제시하였다. Wald 검정에 의하면 두 회귀계수의 차이가 없다는 귀무가설을 기각함으로써 레버리지가 투자지출에 미치는 영향이 서로 다를 수 있음을 확인할 수 있다. 이러한 결과는 기존의 이론과 부합된다. 이것은 Myers and Majluf(1984)의 주장처럼 레버리지가 단순히 기업의 성장기회에 대한 대리변수가 아니라 Jensen(1986)과 Stulz(1990)의 주장처럼 레버리지가 대리인 비용을 억제하는 요인이 된다는 점을 시사한다<sup>16)</sup>.

16) 분석결과는 Lang et al.(1996)의 연구결과와 매우 유사함을 알 수 있다.

&lt;표 6&gt; 레버리지가 기업투자에 미치는 영향 분석 : 토빈q를 기준

변 수	Lverage = (TB/TA) <sub>t-1</sub>	Lverage = (LB/TA) <sub>t-1</sub>	Lverage = (TLB/TA) <sub>t-1</sub>
<i>Intercept</i>	0.031** (0.014)	0.032* (0.018)	0.034* (0.018)
<i>I<sub>t-1</sub>/TA<sub>t-2</sub></i>	0.167*** (0.041)	0.178*** (0.037)	0.169*** (0.039)
<i>HighQ* Leverage</i>	-0.005 (0.004)	0.003 (0.017)	-0.011 (0.013)
<i>LowQ* Leverage</i>	-0.042*** (0.015)	-0.156** (0.071)	-0.086** (0.034)
<i>Tobin's Q<sub>t-1</sub></i>	0.008*** (0.003)	0.005 (0.003)	0.007** (0.003)
<i>CF<sub>t</sub>/TA<sub>t-1</sub></i>	0.300*** (0.051)	0.265*** (0.048)	0.278*** (0.051)
Wald Test	4.470(0.034)**	3.822(0.049)**	3.182(0.074)*
m1(p-값)	0.000	0.000	0.000
m2(p-값)	0.183	0.222	0.183
Sargan(p-값)	0.069	0.126	0.090

주: 1), 2), 3), 4)는 <표 2>의 주와 동일함. 5) 차분방정식의 도구변수는 모든 설명변수의 t-2, t-3, t-4이고 수준방정식의 도구변수는  $\Delta t-1$ 을 적용함. 6) *HighQ*는 토빈q 비율이 1보다 큰 기업은 1, 그 외는 0의 값. *LowQ*는 토빈q 비율이 1보다 작은 기업은 1, 그 외는 0의 값을 부여한 더미변수임. 7) Wald test는 *HighQ\* Leverage*와 *LowQ\* Leverage*의 계수값이 서로 같다는 귀무가설하에서의 검정통계량임.

<표 7>과 <표 8>은 이전분석에 대한 강건성을 보이기 위해 기업분류기준을 토빈q 대신 기업의 미래성장성 지표로 이용되는 매출증가율과 총고정자산증가율을 기준으로 구분하여 추정한 결과를 나타낸다. 추정기간 동안 평균 매출증가율과 고정자산증가율을 측정한 후 상위 75%에 속하는 기업과 하위 25%에 속하는 기업으로 구분하였다. *75Gsale*는 평균매출증가율이 상위 75% 기업은 1, 그 외는 0의 값. *25Gsale*는 평균매출증가율이 하위 25% 기업은 1, 그 외는 0의 값을 부여한 더미변수이다. 또한 *75GTA*는 평균총고정자산증가율이 상위 75% 기업은 1, 그 외는 0의 값. *25GTA*는 평균총고정자산증가율이 하위 25% 기업은 1, 그 외는 0의 값을 부여한 더미변수를 나타낸다. 매출증가율을 기준으로 추정한 <표 7>의 결과는 모든 변수들이 통계적으로 유의하며 이론과 일치되는 부호를 나타내고 있다. 미래성장 가능성이 낮은 하위 25%기업

의 성장 가능성이 높은 상위 75% 기업에 비해 대리인비용 절감효과가 크게 나타나고 있음을 알 수 있다. 다만 두기업 간의 회귀계수의 동일성에 대한 검정결과는 총부채를 이용한 경우에만 귀무가설을 기각하고 있다. 총고정자산증가율을 기준으로 추정된 <표 8>의 경우도 총부채의 경우에 성장가능성이 낮은 기업에서 레버리지가 투자에 미치는 감소효과가 더 크게 나타나고 있고 통계적인 유의성을 갖고 있다.

전체적으로 레버리지가 투자지출에 음(-)의 영향을 미치고 있고 성장기회가 낮은 기업일수록 기업투자에 미치는 영향이 크게 나타나 Jensen(1986)과 Stulz(1990) 등이 주장하는 부채에 의한 대리인 비용 감소효과가 존재함을 알 수 있다.

<표 7> 레버리지가 기업투자에 미치는 영향 분석 : 매출증가율 기준(상위75% vs 하위25%)

변 수	$Lverage = (TB/TA)_{t-1}$	$Lverage = (LB/TA)_{t-1}$	$Lverage = (TLB/TA)_{t-1}$
<i>Intercept</i>	0.029* (0.016)	0.017 (0.013)	0.018 (0.012)
$I_{t-1}/TA_{t-2}$	0.166*** (0.041)	0.172*** (0.041)	0.169*** (0.039)
<i>HighQ* Leverage</i>	-0.007** (0.003)	-0.027** (0.013)	-0.032** (0.015)
<i>LowQ* Leverage</i>	-0.075** (0.031)	-0.107* (0.056)	-0.078** (0.035)
<i>Tobin's Q<sub>t-1</sub></i>	0.010*** (0.003)	0.008*** (0.003)	0.010*** (0.003)
$CF_t/TA_{t-1}$	0.295*** (0.050)	0.271*** (0.049)	0.292*** (0.049)
Wald Test	4.490(0.034)**	1.727(0.188)	1.077(0.299)
m1(p-값)	0.000	0.000	0.000
m2(p-값)	0.175	0.203	0.192
Sargan(p-값)	0.074	0.206	0.130

주 : 1), 2), 3), 4)는 <표 2>의 주와 동일함. 5) 차분방정식의 도구변수는 모든 설명변수의 t-2, t-3, t-4이고 수준방정식의 도구변수는  $\Delta t-1$ 을 적용함. 6) 75Gsale는 평균 매출증가율이 상위 75% 기업은 1, 그 외는 0의 값. 25Gsale는 평균매출증가율이 하위 25% 기업은 1, 그 외는 0의 값을 부여한 더미변수임. 7) wald test는 75Gsale\* Leverage와 25Gsale\* Leverage의 계수값이 서로 같다는 귀무가설하에서의 검정통계량임.

<표 8> 레버리지가 기업투자에 미치는 영향 분석 : 총고정자산증가율  
기준(상위75% vs 하위25%)

변 수	$Lverage = (TB/TA)_{t-1}$	$Lverage = (LB/TA)_{t-1}$	$Lverage = (TLB/TA)_{t-1}$
<i>Intercept</i>	0.028* (0.016)	0.020 (0.013)	0.023 (0.016)
$I_{t-1}/TA_{t-2}$	0.165*** (0.042)	0.171*** (0.041)	0.167*** (0.040)
75 <i>GTA* Leverage</i>	-0.008** (0.003)	-0.014 (0.013)	-0.015 (0.014)
25 <i>GTA* Leverage</i>	-0.070** (0.028)	-0.091 (0.068)	-0.107** (0.051)
<i>Tobin's Q</i> <sub>t-1</sub>	0.011*** (0.003)	0.007** (0.003)	0.009*** (0.003)
$CF_t/TA_{t-1}$	0.290*** (0.051)	0.264*** (0.050)	0.286*** (0.051)
Wald Test	4.596(0.032)**	1.054(0.304)	2.037(0.153)
m1(p-값)	0.000	0.000	0.000
m2(p-값)	0.178	0.180	0.192
Sargan(p-값)	0.069	0.216	0.130

주: 1), 2), 3), 4)는 <표 2>의 주와 동일함. 5) 차분방정식의 도구변수는 모든 설명변수의 t-2, t-3, t-4이고 수준방정식의 도구변수는  $\Delta t-1$ 을 적용함. 6) 75 *GTA*는 평균 총고정자산증가율이 상위 75% 기업은 1, 그 외는 0의 값. 25 *GTA*는 평균총고정자산증가율이 하위 25% 기업은 1, 그 외는 0의 값을 부여한 더미변수임. 7) wald test는 75 *GTA\* Leverage*와 25 *GTA\* Leverage*의 계수값이 서로 같다는 귀무가설하에서의 검정통계량임.

#### IV. 결 론

본 논문은 1981~2002년 기간 동안 389개 상장제조기업의 투자행태를 분석하였다. 분석방법은 기존연구와 달리 투자모형에서 발생하는 내생성 문제를 통제하고 일치추정량을 얻기 위해 Arellano and Bond(1998)가 제안한 system GMM 추정기법을 이용하였다.

Myers(1977)에 따르면 높은 부채사용은 과소투자 유인이 존재한다고 보았는데 이는 기업이 성장기회를 가지고 있더라도 이 투자로 인해 증가된 현금흐름

이 부채 원리금을 전액 변제하지 못할 경우에는 주주들이 투자를 이행할 유인을 갖지 못한다는 것이다. 즉 부채의 과소투자 유인문제에 의하면 레버리지와 투자는 음(-)의 관계를 나타내며 투자기회가 높은 기업에서 더 두드러질 것으로 예상된다. 또한 Jensen(1986)과 Stulz(1990)의 연구도 레버리지와 투자 간에 음의 관계가 존재한다고 예측하지만 이러한 관계가 경영자의 재량권을 제한함으로써 낮은 성장기업의 주주에게는 이득이 될 수 있음을 강조한다. 이러한 현상은 투자기회가 높은 기업보다 투자기회가 낮은 기업에서 더 크게 나타날 것으로 예상된다.

이러한 이론의 타당성을 검증하기 위해 본 연구에서는 토빈q를 기준으로 투자기회가 높은 기업( $q > 1$ )과 투자기회가 낮은 기업( $q < 1$ )으로 구분하였다. 또한 결과의 강건성을 위해 매출증가율과 총고정자산증가율을 기준으로 상위 75% 기업과 하위 25% 기업을 구분하여 추정하였다.

본 논문의 추정 결과는 투자에 대한 레버리지의 영향이 분석대상기간 동안 유의하게 음(-)의 관계를 나타내었다. 특히 성장기회가 낮은 기업일수록 더 큰 음의 영향을 받는 것으로 나타나 이는 Jensen(1986)과 Stulz(1990)의 부채에 의한 대리인비용의 감소효과 이론과 일치한다. 즉, 추정기간 동안 우리나라 제조업에 속한 기업은 부채사용이 높을수록 무리한 기업규모 확대를 억제하는 효과가 있고 Myers and Majluf(1984)의 예상과는 달리 투자기회와 성장기회가 낮은 기업에서 대리인비용의 감소효과가 더욱 강하게 나타남을 알 수 있다. 즉 Myers and Majluf(1984)의 주장처럼 부채가 단순히 기업의 성장기회에 대한 대리변수가 아니라 Jensen(1986)과 Stulz(1990)의 견해인 부채가 대리인 비용을 억제하는 요인으로 작용하고 있음을 나타낸다. 이러한 음의 관계는 이윤 가능한 성장기회가 적은 낮은 q를 갖는 기업에서만 성립함을 보임으로써 레버리지가 빈약한 성장기회를 갖는 기업의 과도투자를 억제한다는 Lang et al. (1996)의 연구결과와 일치된다.

또한 외환위기 이후에 부채비율의 축소와 투자위축은 레버리지의 투자에 대한 영향이 정(+)의 관계인지, 부(-)의 관계인지의 여부에 관한 해석으로 귀결될 수 있다.

본 연구 결과는 레버리지의 영향이 이론과 일치하게 모두 투자지출과 음(-)의 관계를 나타내고 있다. 외환위기 이후 나타난 기업들의 투자 감소는 부채비율 감축 등의 강제적인 정책집행에 따른 부분에 기인하는 측면이 있지만 보다 근본적으로는 기업들의 투자를 지속적으로 증가시킬만한 투자안의 감소, 즉 투자에 대한 불확실성의 증가에 기인하는 것으로 보는 것이 타당하다고 판단된다. 즉 이러한 관계는 부채비율 축소와 투자위축이 서로 어떤 인과성을 가지고 있는가에 의해서 결정될 것이다. 이를 위해서는 패널 인과성 검정이나 불확실성을 고려한 모형으로 확장할 경우 어느 정도 해답을 제시할 것으로 보인다. 이는 향후 연구과제로 남겨둔다. 또한 본 연구는 표준산업분류의 제조업에 속해 있는 기업만을 대상으로 하였기 때문에 1990년대 중반 이후 대규모 투자가 이루어진 통신업이나 해운, 항만업 전기가스 및 수도사업과 관련된 기업이 제외되었다. 향후 이들 기업들을 포함하여 분석한다면 더 나은 결과를 초래할 것으로 판단된다.

## 참 고 문 헌

- 김지수·정기웅, 『규모극대화, 경영자지분과 기업의 자본적 투자지출』, 『재무관리연구』 17, 2000, pp. 1~28.
- 김지수·조정일, 『기업의 투자지출과 자금조달의 관계에 관한 연구』, 『재무관리연구』 18, 2000, pp. 1~25.
- 신선우, 『기업의 금융제약이 재고투자에 미치는 영향』, 『경제분석』 9, 2003a, pp. 107~134.
- 신선우, 『자본시장 불완전성과 환율 불확실성이 기업투자에 미치는 영향』, 『금융연구』 17, 2003b, pp. 83~112.
- 신선우·이훈현, 『금융부문발전과 기업투자』, 『재정연구』 9, 2002, pp. 39~75.
- 윤봉한·오규택, 『투자결정과 자본조달 결정의 통합적 수행여부에 관한 실증분석』, 『재무연구』 12, 1999, pp. 95~124.
- 이병기, 『기업투자의 현금흐름 민감성에 대한 실증분석: 기업규모를 중심으로』, 『산업조직연구』 8, 2000, pp. 75~101.
- 전용수·임태순, 『현금흐름이 투자행위에 미치는 영향에 관한 연구』, 『재무관리연구』 17, 2000, pp. 29~47.
- Aivazian, V.A. and J.L. Callen, "Corporate Leverage and Growth: the Game-Theoretic Issues," *Journal of Financial Economics* 8, 1980, pp. 379~399.
- Arellano, M. and O. Bover, "Another Look at the Instrumental Variable Estimation of Error-Components Models," *Journal of Econometrics* 68, 1995, pp. 29~51.
- Arellano, M. and S.R., Bond, "Some Tests of Specification for Panel Data: Monte Carlo Evidence and an Application to Employment Equations," *Review of Economic Studies* 58, 1991, pp. 277~297.
- Arellano, M. and S.R., Bond, "Dynamic Panel Data Estimation Using DPD98 for Gauss: A Guide for Users," Working Paper No. 98/15, Institute for

- Fiscal Studies, 1998
- Blundell, R., S. Bond, M. Devereux and F. Schiantarelli, "Investment and Tobin's Q," *Journal of Econometrics* 51, 1992, pp. 233~257.
- Carpenter, R. and B. Petersen, "Is the Growth of Small Firms Constrained by Internal Finance," *The Review of Economics and Statistics* 84, 1998, pp. 298~309.
- Gilchrist, S. and P.C. Himmelberg, "Investment, Fundamentals and Finance," *The NBER Macroeconomics Annual*, 1998
- Harrison, A.E., I. Love and M.S. McMillan, "Foreign Investment and Financing Constraints," World Bank Working Paper, 2001
- Hayashi, F. and T. Inoue, "The Relationship Between Firm Growth and Q with Multiple Capital Goods: Theory and Evidence from Panel Data on Japanese Firm," *Econometrica* 59, 1991, pp. 731~753.
- Himmelberg, P.C., R.G. Hubbard and I. Love, "Investor Protection, Ownership, and the Cost of Capital," World Bank Working Paper, 2000
- Hsiao, C. and K. Tahmiscioglu, "A Panel Data Analysis of Liquidity Constraints and Firm Investment," *Journal of the American Statistical Association* 92, 1997, pp. 455~465.
- Jensen, M.C., "Agency Costs of Free Cash Flow, Corporate Finance, and Takeovers," *American Economic Review* 76, 1986, pp. 323~329.
- Laeven, L., "Does Financial Liberalization Reduce Financial Constraints?," mimeo, The World Bank, 2000
- Lang, L.E., Ofek, E. and R.M. Stulz, "Leverage, Investment, and Firm Growth," *Journal of Financial Economics* 40, 1996, pp. 3~29.
- Love, I., "Financial Development and Financing Constraints: International Evidence from the Structural Investment Model," *The Review of Financial Studies* 16, 2003, pp. 765~791.
- McConnell, J.J. and H. Servaes, "Equity Ownership and the Two Faces of

- Debt,” *Journal of Financial Economics* 39, 1995, pp. 131~157.
- Modigliani, F. and M. H. Miller, “The Cost of Capital, Corporate Finance and the Theory of Investment,” *American Economic Review* 48, 1958, pp. 261~297.
- Myers, S. and N.S. Majuf, “Corporate Financing and Investment Decisions When Firms Have Information That Investors Do Not Have,” *Journal of Financial Economics* 13, 1984, pp. 187~221.
- Myers, S.C., “Determinant of Corporate Borrowing,” *Journal of Financial Economics* 5, 1977, pp. 147~175.
- Shin, S.W., “Financial Constraint, Firms’ Inventory Investments and the Credit Channels of Monetary Policy,” *The Bank of Korea Economic Papers* 6, 2003, pp. 56~79.
- Stulz, R. M., “Managerial Discretion and Optimal Financing Policies,” *Journal of Financial Economics* 26, 1990, pp. 3~27.

# 무선 데이터 통신 과금체계에 대한 경제학적 고찰\*

김 정 유\*\*

## 요 약

본 연구에서는 정보이용시간에 따라 과금하는 회선과금방식과 정보이용량에 따라 과금하는 패킷과금방식하의 시장성과를 비교하고자 한다. 주된 결론은 패킷과금방식이 도입되면, 정보이용요금이 낮아질 것이라는 정부의 기대와는 달리, 상승할 것이나, 총 사회적 후생은 오히려 증가하게 된다는 것이다. 이는 회선과금방식과는 달리 패킷과금방식은 정보전송량에 비례하여 발생하는 사회적 비용을 적절히 반영할 수 있기 때문이다. 또한 일반 텍스트 파일보다 높은 전송속도를 요구하는 멀티미디어 파일의 전송의 경우에는 패킷과금방식으로의 선회가 멀티미디어 이용료를 낮춤으로써 멀티미디어 수요를 진작시킬 수는 있으나 이는 혼잡이 문제가 되는 영역에서만 국한되며, 혼잡의 문제가 없는 영역에서는 반드시 그렇지는 않음을 입증해 보일 것이다.

## I. 서 론

최근 인터넷 사용자의 폭발적인 증가와 無線전화 사용자의 大衆化가 결합되어, 무선인터넷서비스에 대한 수요 또한 增加一路에 있다. 또한 최근 動映像 傳送이 가능한 차세대 이동통신의 발전이 기대되면서 무선인터넷시장은 가장

\* 본 연구는 2002년 학술진흥재단의 지원에 의해 이루어졌음.

\*\* 경희대학교 경제학과 교수

유망하고 潛在性이 큰 분야 중 하나로 손꼽히고 있다. OVUM report (2001)의 展望에 따르면, 전세계적으로 무선 인터넷 접속자수는 2001년 초반에 727백만 명 수준에서 2003년에 1,266백만명, 또 2005년에는 1,764백만명에 이를 것으로 推定된다. 또한 무선 전자상거래 가입자는 2005년에 이르면 \$230billion 이상의 수입을 올릴 것으로 예상되고 있다.

이처럼 성장잠재력이 큰 시장에서 실제 그 잠재력이 결실을 맺기 위해서는 적절한 料金體系의 정립이 필수적이라 할 수 있으나, 아직 요금체계에 대한 논의는 활발하게 이루어지지 않고 있는 듯 하다. 현재까지는 대부분의 국가가 인터넷 사용시간에 따라 課金하는 回線課金方式을 사용해 오고 있다. 그러나, 최근 일본의 NTT DoCoMo가 무선 인터넷 상품인 i-mode 서비스를 시작하면서 세계 최초로 정보량에 따라 과금하는 패킷과금방식을 도입하였던바, i-mode는 이러한 패킷과금방식에 힘입어 2000년 9월 현재 11백만명의 가입자를 확보할 정도로 好況을 누리고 있다. 한국에서도 IS-95C서비스를 도입함에 따라 패킷과금방식이 가능해졌고 그 결과 금년 4월부터 패킷課金方式으로 旋回하게 되었다.

韓·日 양국에서 패킷과금방식을 도입한 목적은 사용자들에게 무선인터넷 사용료를 引下시켜 減으로써 무선인터넷 사용자 기반을 증대시키고, 그 결과 무선인터넷 사업의 活性化를 促進시키기 위함이었다. 특히, 한국정부는 멀티미디어 정보에 대해서는 텍스트베이스 데이터보다 낮은 전송요금을 적용하도록 勸告함으로써 멀티미디어 정보의 사용을 장려하고자 하였다. 본 절에서는 주로 위와 같은 일반적 인식의 經濟的 妥當性을 검토하고, 그 결과 최적 요금구조에 대해 논의하고자 한다.

그런데, 위에서 언급한 정부의 논리는 致命的인 缺陷을 갖고 있음을 쉽게 알 수 있다.

먼저, 소비자가 인터넷을 사용하는 시간은 데이터를 傳送받는 시간과 전송된 데이터를 처리하는 시간으로 구성된다. 보통 사용되는 회선과금방식은 정보전송시간과 정보처리시간을 합친 총접속시간에 대해 과금하는 것이고, 패킷과금방식은 전송된 정보량에 대해 과금하는 것이다. 즉 현실적으로 回線方式

에서 패킷方式으로 전환하여 가격이 인하되었다면, 이는 시간 대신 정보량에 대해 과금한 결과 요금이 인하된 것이 아니라, 총접속서비스에 대해 과금하는 대신 전송부분에 대해서만 과금한 결과 인하된 것이다. 따라서 총접속시간에서 정보처리시간을 제한 전송시간에 대해서만 과금하는 제3의 과금방식을 고려한다면, 이에 비해 전송정보량에 대해 과금했을 때 요금이 더 낮아질 것이라고 말할 수는 없을 것이다.

둘째, 이러한 요금정책은 요금체계 결정시 반드시 고려되어야 하는 인터넷 混雜可能性에의 효과가 무시되어 있다. 실제 가격인하로 인한 수요증진은 混雜을 유발하여 오히려 사용자들의 厚生을 감소시킬 수 있다.

본 절에서는 패킷과금방식을 도입했을 때 소비자 가격, 혼잡의 가능성, 사회 후생에 미치는 효과를 분석함으로써 이를 종래의 회선과금방식과 비교할 것이다. 또한 향후 IMT-2000서비스에서는 본격적으로 무선네트워크상에서 멀티미디어 이용이 활발해질 것으로 보이는바, 이 경우 패킷과금방식이 부담으로 작용할 수 있으므로 이에 대비한 장기적인 요금구조 방향을 제시하고자 한다.

세계 각국은 IMT-2000서비스 개시에 앞서, IMT-2000 서비스 시장에서의 경쟁을 촉진하고 공정경쟁 기반을 조성하기 위한 정책방안을 마련하고 있다. 우리나라의 경우도 투명하고 효율적인 IMT-2000 서비스 시장운동을 위하여 서비스 개시 이전에 이를 위한 체계적 정책방안의 수립이 필요하며, 본 절의 연구는 이에 대한 礎石이 될 것으로 사료된다.

1990년대말까지 음성통신의 요금구조에 대해 활발한 연구가 이루어져 왔던 것과는 對照的으로, 데이터 통신 요금에 대한 관심은 비교적 최근에 와서야 비롯되었다. 그 주된 이유는 최근까지 인터넷은 商業的 用途보다는 學術的 用途로 인식이 되어 왔고 따라서 사용자들은 당연히 무료로 사용하는 것으로 생각해 왔기 때문이다. 그러나 최근에 인터넷혼잡이 문제가 되기 시작하면서 이를 요금제도로 해결해야 한다는 주장이 대두되었고, 그 결과 定額制가 지배적인 과금방식으로 자리잡고 있는 유선인터넷 과금방식에 대한 논의가 시작되었다. 이에 대해서는 Mackie-Mason and Varian (1994), Fishburn, Odlyzko and Siders (1997), Mason (2000), Kim (2001) 등이 있다. Mackie -Mason and

Varian (1994)은 혼잡요금이라 불리는 종량제를 고려한 최초의 논문을 발표하였다. 그러나 이들의 분석은 전송시간을 명시적으로 고려하지 않음으로써 회선방식과 패킷방식을 구분하지 않았다. Mason (2000)에서는 보다 일반적인 二部料金制 대신 月定額방식이 지배적인 요금체제로 자리잡게 된 주요 요인을 測定費用에서 찾고 있다. 고정요금 외에 사용량에 대해서도 과금하는 二部料金制를 채택하기 위해서는 소비자들의 인터넷 사용량을 정확히 측정해야 하는데, 일반적으로 이러한 측정에는 추가적인 비용이 소요된다는 것이다. 이러한 測定費用과 競爭效果가 충분히 크면 사용요금 없이 고정요금만을 받는 것이 기업에게도 최적일 수 있음을 보이고 있다. Kim(2001)에서는 인터넷 사용에 있어서 習慣形成的 효과(habit formation)가 있으면 2기에 보다 많은 인터넷 사용을 유도하기 위해 1기에 月定額만 받는 것이 기업에게 유리할 수 있음을 立證한다.

본 절의 연구는 유선인터넷과는 달리 사용요금을 받는 것이 일반화되어 있는 현행 무선인터넷 料金 慣行 (practice)에 대한 이론적 토대를 제공한다 할 수 있으며, 더 나아가 유선인터넷 과금방식에도 유의한 시사점을 제공할 수 있으리라 생각된다.

## II. 모 형

다음과 같은 구체적인 모형을 고려하자.

완전경쟁적인 무선인터넷시장에 크기가 1로 正規化된 消費者 集합과 인터넷 서비스 제공자(ISP)의 集합이 존재한다. 소비자가 인터넷을 사용함으로써 누리는 效用은 받는 정보량  $q$ 와 정보를 받는 시간  $T(q)$ 에 의존한다. 정보수신에 있어서의 지연은 소비자에게 비효율을 초래한다. 데이터 처리시간은 무시할 수준이라고 가정한다.

소비자의 효용을  $U(q, T(q))$ 라 할 때,<sup>1)</sup>  $U$ 에 대해 다음과 같은 가정을 할 것이다.

[가정 1]  $U_1 > 0, U_{11} < 0$

[가정 2]  $U_2 < 0, U_{22} < 0$

[가정 3]  $U_{12} \leq 0$

[가정 1]은 표준적인 한계효용체감의 가정이다. [가정 2]는 소비자의 효용이 주어진 정보량을 받는 데 드는 시간에 따라 감소하고 이러한 한계비효용은 시간에 따라 증가한다는 것이다. [가정 3]은 데이터를 받는 시간이 증가할 때  $q$ 의 한계효용이 증가할 수는 없다는 것을 의미한다.

또한 정보의 전송속도는 網의 混雜이 없는 한 一定하다고 가정한다. 즉, 정보의 전송시간은 사용자가 받는 정보의 양에 의해 전적으로 결정된다.  $q$ 만큼의 데이터를 받는 시간을  $q$ 라고 정규화하면,  $q \leq K$ 일 때  $T(q) = q$ 이고,  $q > K$ 이면  $T(q) > q, T' > 0, T'' > 0$ 라고 가정한다. 단,  $K$ 는 網의 用量이다.  $T(q) \neq q$ 일 때 망에는 혼잡이 발생했다고 말할 것이다.

단위정보를 전송하는 비용은  $c$ 로 일정하고, 傳送遲延으로 인한 추가적 전송 비용은 발생하지 않으며, 固定費用도 없다고 가정한다.

### III. 분 석

위 모형에 대한 分析은 2단계로 이루어질 것이다. 1단계에서, 주어진 가격 하에서의 소비자 선택문제를 고려하고, 2단계에서 시장균형가격의 결정과정을 살펴볼 것이다.

1) Mackie-Mason et al. (1994)은 유한 수의 소비자를 고려함으로써 인터넷 사용자가 타사용자에게 끼치는 외부불경제를 모형 내에 내부화시켰다. 그러나, 한 사람의 사용자가 타사용자가 소비행위에 미치는 효과가 미미한 무한 수의 소비자 세계에서는 본 모형이 보다 타당성을 갖는다. 유한 수의 소비자 모형에 대해서는 제4절을 참고하라.

## 1. 회선과금방식

회선과금방식하에서 단위당 요금을  $p$ 라 할 때, 소비자는

$$\max_q U(q, T(q)) - pT(q)$$

를 풀 것이며, 1계조건은  $U_1(q, T) + U_2(q, T)T' = pT'$ 으로 주어진다. 위 식은 소비자는 데이터를 한 단위 더 전송받을 때 효용의 증가분과 이로 인한 전송지연으로 말미암은 비효용의 증가가 일치하는 수준까지 데이터를 사용한다는 것을 말한다. [가정 1]~[가정 3]하에서 2계조건은 항상 충족됨에 유의하라.

만약 혼잡이 없다면 위 식은  $U_1 + U_2 = p$ 로 환원되는바, 이 때 [가정 1]~[가정 3]으로부터  $U_1 + U_2 > 0$ 이 유도되지 않음에 유의하라. 현실적으로, 소비자들은 자료가 무료라 하여 무한히 많은 양의 정보를 전송받기를 원하는 것은 아니다. 지나친 양의 정보는 전송시간을 연장시킴으로써 이러한 전송지연으로 말미암은 비효용이 기하급수적으로 증가하고 이는 전송수신으로부터의 효용을 곧 초과할 것이기 때문이다. 이러한 이유로  $U_1 + U_2 < 0$ 인 경우를 배제하지 않는 것이 보다 현실적이라 생각된다.

먼저 회선과금방식하에서 혼잡이 없을 때의 소비자의 수요함수를  $D_0(p)$ 라 하면, 이는  $U_1(q, q) + U_2(q, q) = p$ 를 만족하는  $D_0(p) = q$ 이다. 여기서  $D_0(\bar{p}) = K$ 인  $\bar{p} (> 0)$ 가 존재한다. 즉 인터넷을 무료로 사용할 수 있다면 혼잡이 발생한다고 가정한다. 여기서  $\bar{p}$ 는 혼잡을 야기하는 최고가격이라 해석할 수 있다.

혼잡상황에서의 수요함수를  $D(p)$ 라 하면, 위 식을 미분하면  $D'(p) < 0$ 이므로 이들 간에는 다음과 같은 관계가 성립함을 보일 수 있다.

$$\text{(명제 1)} \quad (i) \ D(p) = D_0(p) \text{ if } p \geq \bar{p} \quad (ii) \ D(p) < D_0(p) \text{ if } p < \bar{p} .$$

[증명]  $\bar{p}$ 의 정의와  $D'(p) < 0$ 로부터 (i)은 명백하다. (ii)를 증명하기 위해,

$q > K$ 에 대하여

$$\frac{U_1(q, T(q))}{T} + U_2(q, T(q)) < U_1(q, T(q)) + U_2(q, T(q)) < U_1(q, q) + U_2(q, q)$$

가 성립한다.  $D'(p) < 0, D_0'(p) < 0$ 이므로, 모든  $p < \bar{p}$ 에 대해  $D(p) < D_0(p)$ 이다.

직관적으로 인터넷 사용자는 혼잡의 가능성이 있을 때 추가적인 정보수신은 전송지연을 일으켜 금전적·비금전적 비효율을 증가시키기 때문에 데이터를 적게 수요한다. 물론 이 결과는  $U_{12}$ 과  $U_{22}$ 에 대한 가정에 의존한다. 만약 전송시간이 길어질수록 한계비효율이 감소하거나  $q$ 의 한계효율이 증가한다면 인터넷사용자는 혼잡을 염려할 필요가 없는 경우에 비해 혼잡에 직면한 경우 데이터를 더 많이 수요할 수도 있다. 하지만 이 어느 것도 현실적이지 않으므로 [가정 2]와 [가정 3]에 의해 이러한 경우들은 배제시키는 것이 타당할 것이다.

이제 대표기업의 이윤은

$$\pi = pT(q) - cq$$

로 주어진다. 기업들이 Bertrand방식으로 경쟁한다면 모든 기업은 균형에서 영의 이윤을 얻게 되고, 이는

$$p^* = \frac{q}{T(q)} c \text{를 의미한다. 따라서 망이 혼잡한 경우에는 } p^* < c \text{이고 혼잡}$$

이 없는 경우에는  $p^* = c$ 임을 뜻하게 된다. 하지만, 이는 혼잡이 발생하는 경우 기업이 적자를 본다는 것을 의미하는 것은 아니다. 왜냐하면 이 때의 가격은 단위정보에 대해 부과되는 것이 아니라 단위전송시간에 대해 부과되는 것이기 때문이다. 혼잡으로 인하여 전송이 정상적인 경우에 비해 지연되면 가격이 한계비용보다 낮을지라도 기업은 수지가 맞게 된다. 왜냐하면 혼잡한 망에서 데이터를 전송하는 데는 추가적 비용이 소요되지 않기 때문이다.

## 2. 패킷과금방식

한편, 패킷과금방식하에서 소비자는

$$\max_q U(q, T(q)) - pq$$

를 극대화하고자 할 것이므로, 1계조건에 의해  $U_1(q, T) + U_2(q, T)T' = p$ 가 만족되어야 한다. 패킷과금방식하의 수요함수를  $\bar{D}(p)$ 라 하면, 우리는 다음과 같은 성질을 얻는다.

$$\text{(명제 2)} \quad D(p) \leq \bar{D}(p) \leq D_0(p).$$

[증명] 이는  $T(q) \geq 1$ 이므로 당연하다.

또한  $\bar{D}(\bar{p}) = K$ 임을 보는 것은 쉽다. 이는 다음과 같은 명제를 가능케 한다.

**(명제 3)** 회선과금방식에서 망이 혼잡하면 패킷방식하에서도 그러하며 이역도 성립한다.

[증명] 위로부터  $D_0(\bar{p}) = D(\bar{p}) = \bar{D}(\bar{p}) = K$ 이고,  $D'(p) < 0$ ,  $\bar{D}'(p) < 0$ 이므로,  $p < \bar{p}$ ,  $D(p) > K$ ,  $\bar{D}(p) > K$ 는 모두 동치이다. 따라서 회선과금방식하의 혼잡과 패킷과금방식하의 혼잡은 동치가 된다.

명제 3에 의하여 명제 2는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$D(p) = \bar{D}(p) = D_0(p) \text{ if } p \geq \bar{p}$$

$$D(p) < \bar{D}(p) < D_0(p) \text{ if } p < \bar{p}$$

앞으로  $p \geq \bar{p}$ 인 경우를 비혼잡영역, 반대의 경우를 혼잡영역이라 부를 것이다.

위 식은 주어진 가격하에서 수요가 일반적으로 패킷방식하에서 더 크고 비혼잡영역에서는 두 과금방식하에서 동일하다는 것을 말해 준다. 직관적으로, 이는 회선방식하에서 혼잡한 경우 추가적 요금부담을 피하고자 하는 노력의 결과로 발생하는 수요감소효과가 패킷방식하에서는 존재하지 않기 때문이다.

패킷방식하에서의 시장가격을  $\tilde{p}^*$ 라 하자. 기업의 이윤은 패킷방식하에서  $(p-c)D(p)$ 이므로 영의 이윤조건으로부터  $\tilde{p}^* = c$ 가 된다. 즉, 패킷과금방식하에서 인터넷사용자는 그들이 일으키는 사회적 비용만큼을 정확히 인터넷 사용의 대가로 지불하게 된다.

### 3. 비 교

먼저 회선과금방식과 패킷과금방식하의 시장요금들을 비교해 보자. 우리는 비혼합영역에서  $p^* = \tilde{p}^* = c$  이고 혼합영역에서  $p^* < c = \tilde{p}^*$ 임을 쉽게 알 수 있다. 즉 패킷과금방식하에서 요금이 일반적으로 높다. 상기한 대로, 이는 회선방식하에서 경쟁기업은 혼합으로 인한 전송지연이 발생하는 경우 한계비용보다 낮은 요금수준에서 정확히 수지가 맞기 때문이다.

둘째, 사회적 후생을 비교하자. 소비자 잉여와 기업들의 이윤의 합으로 정의되는 사회적 후생을  $W$ 로 나타내면 최적 사용량  $q^s$ 는

$$\max_q W = U(q, T(q)) - cq$$

이다. 따라서,  $q^s$ 는 다음과 같은 1계조건을 만족해야 한다.

$$U_1 + U_2 T = c.$$

이는 사용자가 사적인 한계편익 (한계효용에서 지연으로 인한 한계비용을 제한 것)과 한계비용이 같아지는 수준까지 인터넷을 사용해야 함을 의미한다.

위 논의로부터 회선과금방식하에서 사용자들은

$$U_1 + U_2 T = p^* T = \frac{q}{T} T c > c (T' > 0) \text{이므로}$$

을 만족하는 수준까지 소비하고, 이는 인터넷이 회선과금방식하에서 과소이용됨을 의미한다. 직관적인 이유는 지연된 전송에 대한 실제 한계비용은  $c$ 임에도 소비자들은 지연에 대해 추가적인 요금을 지불하기 때문이다.

한편, 패킷과금방식하에서 소비자들은 다음을 만족하는 양을 사용한다.

$$U_1 + U_2 T = \widetilde{p}^* = c$$

이는 패킷과금방식하에서 사회적 최적이 보장된다는 것을 의미한다. 이는 패킷과금방식하에서는 시장요금과 동일한 한계사적비용이 항상 사회적 한계비용과 일치하기 때문이다. 이는 다음 명제로 요약되는 우리의 주 결론을 도출한다.

**(명제 4)** 패킷과금방식하에서 사회적 최적이 달성되고, 회선과금방식하에서는 인터넷이 과소이용된다.

[증명] 생략

명제 4는 다음과 같은 따름정리를 갖는다.

**(따름정리 1)** 패킷과금방식하에서 혼잡이 더 심화된다.

명제4와 따름정리 1을 함께 고려하면, 혼잡에 대한 부의 효과에도 불구하고 패킷방식은 사회적 후생을 증가시킨다는 점에서 보다 장려되어야 한다.

#### IV. 유한 수의 소비자 모형

제2절에서 소개한 대표 소비자 모형은 소비자들이 무한하다는 것을 전제하고 있다. 이 절에서는  $n(< \infty)$  소비자가 존재한다고 가정하고 소비자 집단의 인구수에 의해 결과가 어떻게 영향을 받는지 살펴보기로 한다.

이제 소비자는 무시할만한 미미한(atomless) 존재가 아니므로, 한 소비자의 사용량이 다른 사용자들에게 무시될 수 없는 부의 외부효과를 초래한다. 정보

수신에 소요되는 시간은  $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ 라 할 때,  $\widehat{T}(q, Q)$ 로 쓸 수 있다. 우리는

$$(i) \widehat{T}(q_i, Q) = q_i \text{ if } Q \leq K$$

$$(ii) \widehat{T}(q_i, Q) > q_i, \widehat{T}_1 > 1, \widehat{T}_{11} > 0, \widehat{T}_2 > 0, \widehat{T}_{22} > 0 \text{ if } Q > K$$

를 가정한다. 또한

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{T}_2(q, Q) = 0$$

를 가정한다. 이 가정은 사용자 집단이 커질수록 한 소비자가 주는 외부효과가 점차 감소한다는 사실을 반영한다. 이 가정들을 만족하는  $\widehat{T}$ 의 특수한 형태는  $\widehat{T}(q_i, Q) = T(q_i, Q/n)$ 이다.  $n$ 이 무한대로 커질 때  $\widehat{T}$ 의 극한인 경우가 바로 2절의 모형이 된다.<sup>2)</sup>

이 때 우리의 첫 번째 결과가 여전히 성립함을 쉽게 확인할 수 있다. 즉 패킷과금하에 시장요금은 높아진다. 이를 보기 위해, 회선과금하의 대표기업의 이윤은  $\pi = p \sum_{i=1}^n \widehat{T}(q_i, Q) - c \sum_{i=1}^n q_i$ 이고, 패킷과금하에서는  $\pi = (p - c) \sum_{i=1}^n q_i$ 이다.

따라서 무이윤 조건으로부터  $p^* = \frac{Q}{\sum_{i=1}^n \widehat{T}(q_i, Q)} c, p^{**} = c$  를 얻는다. 따라서,

혼잡이 발생하면  $p^* < p^{**}$ 이 된다.

각 사용자가 발생시키는 부의 외부효과가 무시될 수 없을 정도이면 두 번째 결과인 패킷과금의 최적성 결과가 일반적으로 성립하지 않으리라는 것은 의심할 여지가 없다. 사회적 최적 사용량은

$$\max_{q_1, \dots, q_n} W = \sum_{i=1}^n U(q_i, \widehat{T}(q_i, Q)) - \sum_{i=1}^n c q_i$$

이다. 대칭적 균형을 가정하면, 1계조건은

$$U_1 + U_2(\widehat{T}_1 + \widehat{T}_2) + \frac{n-1}{n} U_2 \widehat{T}_2 = c$$

2) 사용자수  $n$ 이 무한대로 증가하면 외부성이 소멸된다는 것은 다음과 같이 이해할 수 있다. 게임이론에서는 모든 사용자가 동시에 사용량을 늘리는 것을 허용하지 않는다. 한 소비자가 사용량을 증가시키는 것이 사회 전체의 인터넷사용량에 비해 극히 미미하다는 것이다.

이다. 인터넷의 추가적 사용은 사회적 비용을  $c + \frac{n-1}{n} U_2 \widehat{T}_2$ 만큼 증가시킨다. 첫 번째 항은 추가적 전송비용이고 두 번째 항은 다른 소비자가 수신하는 정보를 지연시킴으로 인한 비용이다. 사적 최적과 사회적 최적 간의 괴리는 인터넷 요금이 위 두 가지 비용을 적절히 내부화시키지 못할 때 발생할 수 있다.

패킷과금하에서는  $p^{**} = c$ 이므로,

$$U_1 + U_2(\widehat{T}_1 + \widehat{T}_2) = p^{**} = c$$

이어야 한다. 이는 패킷요금이 전송비용  $c$ 를 반영하지만 사회적 최적을 보장하지 못한다는 것을 의미한다. 부의 외부효과로 인해 발생하는  $\frac{n-1}{n} U_2 \widehat{T}_2$ 라는 추가적 항 때문에, 소비자들은 인터넷을 과다하게 사용하는 경향이 생긴다. 그러나, 회선과금방식은 전송비용을 적절히 반영하지 못 한다. 따라서 어느 과금 방식이 보다 효율적인가는 어느 효과가 더 크가에 달려 있다. 한 소비자의 사용량이 전체 시장 크기에 비해 상대적으로 적어서 각 소비자가 초래하는 외부 불경제의 비중이 작은 경우에는 추가적 항으로 인한 두번째 효과가 약하므로 패킷과금방식이 보다 사회적 최적에 근접할 수 있을 것이다.

## V. 두 가지 유형의 데이터

위에서 우리는 모든 데이터의 전송속도가 동일하다고 가정했다. 그러나 멀티미디어 파일은 일반적으로 텍스트 파일보다 훨씬 빠른 속도의 전송을 요한다.

따라서 이 절에서는 모든 정보의 傳送速度가 동일하다는 가정을 완화하여 멀티미디어와 텍스트 파일처럼 평균전송속도가 다른 두 가지 유형의 데이터가 있는 상황을 고려할 것이다. 두 가지 타입의 데이터의 사용량을 각각  $q_1, q_2$ 라 하고, 이들 데이터의 전송시간을 각각  $T(q_1), T(q_2)$ 라 할 때, 可算的 分離可

能性을 가정함으로써 효용함수를

$$U = (1 - \theta)u(q_1, T(q_1)) + \theta u(q_2, T(q_2))$$

로 쓸 수 있다. 여기서  $\theta$ 는 소비자의 텍스트파일에 대한 멀티미디어 파일의 상대적 선호도를 나타낸다. 앞 절에서의  $u(\cdot, \cdot)$ 에 대한 모든 가정은 유지하기로 한다.

전송시간에 대해서는  $q_1 + q_2 \leq K$ 이면  $T_1(q_1) = q_1, T_2(q_2) = t(q_2) < q_2$ 이고  $q_1 + q_2 > K$ 이면  $T_1(q_1) > q_1, T_2(q_2) > t(q_2)$ 을 가정한다. 또한 다음을 가정한다.

$$[\text{가정 4}] \text{ 모든 } q \text{에 대하여 } T_1(q) > T_2(q) > 0, T_1'(q) > T_2'(q) > 0$$

단위 사용량  $q_1, q_2$ 의 전송비용은  $c_1, c_2$ 라 가정한다. 단  $c_1 < c_2$ 이다.

우리는 회선과금방식과 패킷과금방식하에서 모두  $q_1, q_2$ 에 대해 서로 다른 요금을 책정하는 요금체계를 고려할 것이다.

## 1. 회선과금방식

회선과금방식하에서 소비자의 선택문제는

$$\max (1 - \theta)u(q_1, T_1(q_1)) + \theta u(q_2, T_2(q_2)) - p_1 T_1(q_1) - p_2 T_2(q_2)$$

가 된다. 최적 사용량은

$$(1 - \theta)[u_1(q_1, T_1(q_1)) + u_2(q_1, T_1(q_1))T_1'(q_1)] = p_1 T_1'(q_1),$$

$$\theta[u_1(q_2, T_2(q_2)) + u_2(q_2, T_2(q_2))T_2'(q_2)] = p_2 T_2'(q_2).$$

를 만족해야 한다.

여기서  $\theta = 1/2$ 이고  $p_1 = p_2$ 이면  $q_1^* < q_2^*$ 가 된다. 즉, 소비자가 텍스트 베이스 데이터와 멀티미디어 데이터 간에 특별한 선호가 없다면, 그리고 그들의 가격이 동일하다면 회선과금방식하에서 멀티미디어자료를 더 쓰게 된다. 왜냐

하면 멀티미디어 전송이 훨씬 빠르기 때문이다. 뿐만 아니라, 2계조건이 충족된다고 가정하면,  $\theta$ 가 증가할수록  $q_1$ 은 감소하고  $q_2$ 는 증가함을 쉽게 볼 수 있다.

이제  $q_1, q_2$ 에 대한 수요함수를 각각  $D_1(p_1), D_2(p_2)$ 라 나타내자. 가산적 분리 가능성 때문에  $q_1, q_2$ 는 독립재이고 따라서 이들은 서로 다른 재화의 가격에 의해 영향을 받지 않음을 의미한다. 또한 [가정 1]과 [가정 2]는  $D_1', D_2' < 0$ 을 의미한다. 이제 혼잡영역을  $A$ 라 하면,  $A = \{(p_1, p_2) | D_1(p_1) + D_2(p_2) > K\}$ 이다. 따라서 혼잡영역의 경계를  $A^b$ 라 나타내면, 이는  $D_1(p_1) + D_2(p_2) = K$ 를 만족하는  $(p_1, p_2)$ 의 궤적이 된다.

회선과금방식 하에서의 기업의 이윤은

$$\pi = p_1 T_1(q_1) - c_1 q_1 + p_2 T_2(q_2) - c_2 q_2$$

가 된다. 여기서  $\pi_1 = p_1 T_1(q_1) - c_1 q_1$ ,  $\pi_2 = p_2 T_2(q_2) - c_2 q_2$ 라 하면 Bertrand 경쟁에 의해 균형에서  $\pi_1 = \pi_2 = 0$ 이 된다. 그렇지 않으면 기업은  $\pi_i > 0$ 인 서비스의 가격을 약간 낮춤으로써 양의 이윤을 얻을 수 있기 때문이다. 결국 영의 이윤 조건으로부터 시장요금들은

$$p_i^* = \frac{q_i}{T_i(q_i)} c_i, i=1,2$$

가 된다.

여기서 혼잡이 없으면 멀티미디어 정보의 전송요금이 텍스트베이스 정보의 전송요금보다 높음에 유의하라. 이유는 두 가지이다. 첫째, 단위정보의 전송비용이 고속전송을 요하는 멀티미디어의 경우 훨씬 높다. 또한 지연시간이 짧기 때문에 수지를 맞추기 위해서는 단위전송시간에 대해 보다 높은 가격이 요구된다.

## 2. 패킷과금방식

패킷방식하에서 소비자는

$$\max (1 - \theta)u(q_1, T_1(q_1)) + \theta u(q_2, T_2(q_2)) - p_1 q_1 - p_2 q_2$$

인  $q_1, q_2$ 를 선택한다. 따라서 1계조건에 의해

$$(1 - \theta)[u_1(q_1, T_1(q_1)) + u_2(q_1, T_1(q_1))T_1'(q_1)] = p_1,$$

$$\theta[u_1(q_2, T_2(q_2)) + u_2(q_2, T_2(q_2))T_2'(q_2)] = p_2$$

를 만족해야 한다. 이 때의 수요함수들을  $\tilde{D}_1(p_1), \tilde{D}_2(p_2)$ 라 하면,

$$D_1(p_1) \leq \tilde{D}_1(p_1),$$

$$D_2(p_2) \leq \tilde{D}_2(p_2) \text{ 이고 등호는 } (p_1, p_2) \in A^c \text{ 일 때 성립한다.}$$

이제 영의 이윤조건으로부터  $\pi_i = (p_i - c_i)\tilde{D}_i(p_i) = 0$ , 즉  $\tilde{p}_i^* = c_i$ 가 성립해야 한다.

## 3. 비 교

위에서 두 과금방식하에서의 시장요금을 도출하였다. 이제, 이들을 비교하여 정책적 함의점들을 도출해 보고자 한다.

먼저, 비혼잡영역에서는 회선과금방식하에서  $p_2^* = \frac{q_2}{t_2} c_2 > c_2$ 이고, 패킷과금방식하에서는  $\tilde{p}_2^* = c_2$ 임에 유의하라. 이는 K가 매우 커서 혼잡을 야기시키지 않는다면 회선과금방식에서 패킷과금방식으로 전환함으로써 멀티미디어 정보에 대한 요금을 낮추고 그렇게 함으로써 멀티미디어 사용량을 증가시키게 됨을 의미한다. 즉, 패킷과금방식은 멀티미디어 정보의 사용을 장려하게 된다. 직관적 이유는 패킷방식하에서는 회선방식의 경우와는 달리 전송시간과 무관하게 단위정보당 요금이 책정되기 때문이다. 회선방식하에서 기업은 전송시간이 짧은 멀티미디어의 요금이 단위비용보다 높게 유지되어야만 정확히 수지가

맞게 된다. 따라서 멀티미디어 데이터의 요금은 단위요금과 같은 수준으로 책정되는 회선방식하의 요금보다 낮게 된다. 물론 혼잡영역에서 패킷방식도입이 멀티미디어 정보의 요금에 미치는 효과는 모호하다. 이는 혼잡이 정보전송에 얼마만큼 의존하느냐에 달려 있다.

이제, 우리는 두 가지 과금방식하에서  $\theta$ 의 증가가 가격에 미치는 효과를 비교할 것이다.

회선과금방식하에서  $p_1^*$ 는

$p_1^* T_1(q_1) - c_1 q_1 = 0$ 을 만족해야 한다. 이를  $\theta$ 에 대해 미분하면

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial \theta} T_1 + (p_1 T_1' - c_1) \frac{\partial q_1}{\partial \theta} = 0$$

이 된다.  $p_1 T_1' - c_1 > p_1 \frac{T_1}{q_1} - c_1 = 0$ 이고  $\frac{\partial q_1}{\partial \theta} < 0$ 이므로  $\frac{\partial p_1^*}{\partial \theta} > 0$ 이 따른다.

직관적으로,  $\theta$ 가 커질수록  $q_1$ 은 감소하고 결국  $q_1$ 에 대한 시장가격인  $p_1^*$ 가

수지를 맞추기 위해 증가해야 한다. 같은 방법으로  $\frac{\partial p_2^*}{\partial \theta} < 0$ 을 얻는다. 이는 소비자의 기호가 시간이 지남에 따라 멀티미디어 쪽으로 바뀌게 된다면 멀티미디어 정보에 대한 가격은 회선과금방식하에서 감소하게 된다는 것을 의미한다.  $\theta$ 의 증가가 패킷방식하에서는 요금에 전혀 영향을 주지 못함에 유의하라.

마지막으로, 패킷과금방식하에서 시장성과는 항상 한계비용요금으로 나타나므로 항상 최선의 상태를 달성할 수 있음을 강조하고자 한다.

## VI. 결 론

본 연구에서는 인터넷시장의 단순한 경쟁모형에서 회선과금방식과 패킷과금방식의 시장성과를 비교하였다.

주된 결과들은 다음과 같다. 첫째, 패킷과금방식이 도입되면 시장형성 요금

은 높아지며, 이는 정부의 의도에는 반하는 것이다. 둘째, 인터넷 혼잡은 악화될 것이다. 셋째, 그럼에도 불구하고 전체적인 사회후생은 증대되는바, 이는 패킷과금방식이 회선과금방식과는 달리 사회적 비용을 보다 잘 반영하기 때문이다. 마지막으로, 고속 정보전송요금은 혼잡이 없는 경우 낮아질 것이고, 그 결과 멀티미디어 사용은 활성화된다. 이는 정부의 의도와 합치하는 결과이다.

본 연구를 통하여 무선인터넷 시장이 매우 경쟁적이라는 가정을 사용해 왔다. 그러나 이 시장에 우리가 예상하는 것처럼 조속한 시일 내에 경쟁화되지 못하도록 하는 장애요소가 존재하게 되면 결과는 달라질 수 있다. 예컨대, 시장이 독점적이면, 독점력은 회선과금방식이나 패킷과금방식이나 요금을 한계비용보다 높은 수준으로 끌어올리게 되고 그 결과 인터넷은 두 과금방식 하에서 모두 과소사용된다. 또한 패킷과금이 요금에 주는 영향도 모호해지게 된다.

본 연구의 또 하나의 한계점은 모든 소비자가 기호에 있어서 동일하다는 가정에 있다. 그러나 현실적으로 소비자들은 어떤 의미에서 특히  $\theta$ 의 크기에 있어서 이질적이다. 예컨대, 어떤 소비자는 주로 이메일 전송을 위한 목적으로만 인터넷을 사용하고, 또 어떤 소비자들은 주로 멀티미디어 정보의 전송에 대부분의 시간을 할애한다. 그러한 경우 기업들은 이러한 다양한 기호를 가진 소비자들을 구분하기 위해 두 가지 이상의 가격 메뉴를 소비자들에게 제시함으로써 효과적으로 가격차별화를 하기를 원할 것이다. 그러나 이러한 가격차별화는 우리가 현재 고려하고 있는 경쟁적인 시장 상황에서는 가능하지 않을 것이다. 이러한 이유로 가격차별화의 가능성은 본 연구에서는 다루지 않고 있으나, 향후 충분히 검토해 볼만한 주요 연구과제일 것이다.

본 연구는 매우 자연스런 가정들을 사용하여 이루어졌다고 확신하는 바이다. 따라서 본 연구에서 사용된 가정들이 비록 모든 현실적인 상황을 다 고려하는 포괄적 가정들은 아니라 할지라도 그러한 상황에 대해서도 충분히 분석할 수 있는 분석의 토대를 제공해 준다고 생각한다. 또한 앞으로 새로운 기술이 출현한다 할지라도 위 모형은 그러한 환경변화를 쉽게 수용할 수 있으리라 사료된다.

## < 부 록 >

본 부록에서는 인터넷 사용자가 자신이 받은 정보의 처리를 완료했을 때에만 비로소 효용을 얻는 일반적인 모형을 고려할 것이다.

우리는 혼잡의 가능성은 고려하지 않기로 한다. 즉  $K = \infty$ 를 가정한다. 그러면 정규화에 의해 정보전송시간, 정보처리시간을 각각 정보전송량, 정보처리량과 동일하게 취급할 것이다. 정보전송시간을  $q_1$ , 정보처리시간을  $q_2$ 라 하자. 또한 정보를 받아서 처리한 양을  $q$ 라 하자. 그러면  $q$ 는  $q_1, q_2$ 에 대해 증가함수이다. 즉,  $q = f(q_1, q_2)$ 이고  $f_1, f_2 > 0$ 이다. 우리는  $f(q_1, q_2)$ 로  $q_1 + q_2, q_1 q_2, \min\{q_1, q_2\}$  등 다양한 형태를 고려할 수 있다. 또한 인터넷 사용자는  $q$ 만으로부터 효용을 얻는다 즉  $U = u(q)$ 에서  $u' > 0, u'' < 0$ 를 가정한다.

우리는 독점기업을 고려한다. 독점기업의 정보전송과 정보처리에 따르는 단위비용을 각각  $c_1, c_2$ 라 할 것이다. 단  $c_1 > c_2$ 를 가정한다.

$q_1, q_2$ 가 모두 측정가능하다 하자. 그러면 정보전송과 정보처리 각각에 대해 단위당  $p_1, p_2$ 의 가격을 책정하는 요금체계가 가능할 것이다.

이제 기업의 의사결정을 고려하자.  $p_1, p_2$ 에 대해 소비자는 다음과 같은  $q_1, q_2$ 를 선택할 것이다.

$$\max_{q_1, q_2} U(q_1, q_2) \equiv u(f(q_1, q_2)) - p_1 q_1 - p_2 q_2.$$

1계조건에 의해

$$U_i \equiv u' f_i - p_i = 0, \quad i = 1, 2$$

이 성립해야 한다. 2계조건은 헤시안 행렬이 음정부호이기를 요구한다. 즉,

$$U_{11} < 0, \Delta > 0$$

이어야 한다.

2계조건이 충족된다고 가정할 때 1계조건으로부터 잘 정의된 수요함수들이

유도되는바, 이들을  $q_1 = D_1(p_1, p_2)$ ,  $q_2 = D_2(p_1, p_2)$ 라 표기할 것이다. 또한 1계조건을 미분하면

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{U_{22}}{\Delta} < 0 \text{이고 } \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = -\frac{U_{21}}{\Delta} \text{이다.}$$

여기서  $U_{12} = U_{21} > 0$ 을 가정함으로써  $q_1$ 과  $q_2$ 를 보완재로 보는 것이 자연스러울 것이다.

이제 독점기업은  $p_1, p_2$ 를 다음과 같이 선택할 것이다.

$$\max_{p_1, p_2} \pi = (p_1 - c_1)D_1(p_1, p_2) + (p_2 - c_2)D_2(p_1, p_2)$$

1계조건에 의해

$$D_i(p_1, p_2) + (p_i - c_i) \frac{\partial D_i}{\partial p_i} + (p_j - c_j) \frac{\partial D_j}{\partial p_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

이어야 한다.

몇 가지 정책적 시사점을 찾을 수 있다. 현재, 무선인터넷 요금에는 두 가지 방식이 사용되고 있다. 하나는 총접속시간인  $q_1 + q_2$ 에 대해 요금을 받는 방법이고, 둘째는 전송된 정보에 대해서만 요금을 받는 방법이다. 우리는 위 두 가지 방법 모두 최적 요금구조의 특수한 형태에 지나지 않는다는 것을 알 수 있다. 특히 널리 사용되고 있는 회선과금방식은  $q_1 + q_2$ 에 대해 요금을 받고 있는데 이는  $f(q_1, q_2) = q_1 + q_2$ 인 경우에만 정당화될 수 있다. 패킷과금방식은  $c_1$ 이 아주 작은 경우에만 최적일 수 있다. 따라서 실용적인 견지에서 본다면 최적의 요금구조를 고안하기 위해서는 먼저  $f(q_1, q_2)$ 의 함수형태를 정확히 추정해 내는 것이 선결과제라 하겠다.

## 참 고 문 헌

- Brownlee, N., *New Zealand Experience with Network Traffic Charging*, 1994, ConneXions 8: available on the web at <http://www.auckland.ac.nz/net/accounting/nze.html>
- Fishburn, P.C., Odlyzko, A.M. and Siders, R.C., Fixed Fee versus Unit Pricing for Information Goods, *Competition, Equilibria, and Price Wars*, *First Monday* Vol. 2, No.7, 1997
- Kim, J.-Y., "Internet Pricing and Habit Formation," Working Paper No. 0106, Korea Association for Telecommunications Policies, 2001
- Mackie-Mason, J. K. and H. Varian, *Pricing Congestible Network Resources*, University of Michigan, 1994
- Mason, R., "Simple Competitive Internet Pricing," *European Economic Review*, Vol. 44, 2000, pp. 1045~1056
- Nahata, B., Ostaszewski, K. and P. Sahoo, Buffet Pricing, *Journal of Business*, Vol. 72, No.2, 1999, pp. 215~228
- OVUM, *Global Mobile Markets 2001-2005*, London: Ovum Ltd, 2001

# IDENTIFICATION AND ESTIMATION OF NONPARAMETRIC STRUCTURAL MODELS BY INSTRUMENTAL VARIABLES METHOD\*

Woocheol Kim<sup>†</sup>

Korea Institute of Public Finance

and

Institute of Statistics and Econometrics,

Humboldt University zu Berlin

March, 2004 (First draft: November 2003)

## Abstract

This paper concerns a new statistical approach to instrumental variables (IV) method for nonparametric structural models with additive errors. A general identifying condition of the model is proposed, based on richness of the space generated by marginal discretizations of joint density functions. For consistent estimation, we develop statistical regularization theory to solve a random Fredholm integral equation of the first kind. A minimal set of conditions are given for consistency of a general regularization method. Using an abstract smoothness condition, we derive some optimal bounds, given the accuracies of preliminary estimates, and show the convergence rates of various regularization methods, including (the ordinary/iterated/generalized) Tikhonov and Showalter's methods. An application of the general regularization theory is discussed with a focus on a kernel smoothing method. We show an exact closed form, as well

---

\*I would like to thank W. Härdle, O. Linton, W. Newey, P. Phillips, and V. Spokoiny for helpful discussions and comments.

<sup>†</sup>Address correspondence to: Woocheol Kim, Korea Institute of Public Finance, 79-6 Garak-Dong, Songpa-Gu, Seoul, Republic of Korea, 138-774. E-mail address: [wkim@kipf.re.kr](mailto:wkim@kipf.re.kr)

as the optimal convergence rate, of the kernel IV estimates of various regularization methods. The finite sample properties of the estimates are investigated via a small-scale Monte Carlo experiment.

## 1 Introduction

In econometric models, explanatory variables are often presumed to be endogenous (i.e., correlated with error terms), when their relation to dependent variables represents optimizing behaviors of individuals or market equilibrium. The relations thereof are called ‘structural’ to be differentiated from a reduced form that comes out of a pure statistical underpinning. The literature abounds in studies of various structural models with different sources of endogeneity, including linear simultaneous equations, measurement errors, heterogenous treatment effects, random effects in panel data, and sample selection, etc. Common to the previous studies, however, is a restrictive assumption that the true structural relation is known *a priori* up to some parametric class. When misspecification is one’s main concern, nonparametric methods can be a useful alternative, whose development in a structural setup is of only recent interest. This paper, specializing in structural models with additive errors, contributes to nonparametric instrumental variables method, by providing new results for both identification and estimation. Suppose that the random variables  $(Y_i, X_i)$  are generated by the following regression models, with  $X_i$  including some endogenous variables, say,  $Z_i$ ;

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, \tag{1}$$

where  $\varepsilon_i$  is iid( $0, \sigma^2$ ) and  $m(\cdot)$  is an unknown function. Due to endogeneity in  $X$ , the structural function  $m(\cdot)$  needs to be identified by postulating a set of instrumental variables (IV)  $W$  that satisfy certain stochastic restrictions w.r.t. the errors  $\varepsilon$ .  $W$  is allowed to have common elements with  $X$ ;

$$X = (Z, W_1), \text{ and } W = (W_1, W_2). \tag{2}$$

With infinite dimensional parameters to be identified, the instrumental variables are required to satisfy stronger restrictions than for parametric models. For example, Roehrig (1988) assumed that  $W$  is independent of  $\varepsilon$ , to identify  $m(\cdot)$ . Alternatively, one may prefer to assume weaker restrictions on  $W$  in form of conditional moments so that the models can afford more general features such as conditional heteroscedasticity. Along this line, two different methods have recently been considered. One is the *instrumental variable* method of Newey and Powell (1988, 2003) and Darolles, Florens,

and Renault (2001) that use a restriction

$$E(\varepsilon|W) = 0, \tag{3}$$

and the other is the *control function* method by Newey, Powell and Vella (1999) that assume  $E(\varepsilon|X, \eta) = E(\varepsilon|\eta)$ , where  $\eta = X - E(X|W)$ . Although either restriction does not imply the other, the moment condition (3) is the one that is more familiar and easily interpretable. Including the standard regression as a special case (for  $W = X$ ), (1) through (3) give rise to nonparametric generalization of various structural models analyzed by the IV methods of Sargan (1958) and Amemiya (1974) as well as the GMM of Hansen (1982); henceforth the name comes.<sup>1</sup> Simplicity of the models, however, comes only at a cost of nonstandard identification and estimation. Since the seminal work by Newey and Powell (1988), it has been well noted that, under (3),  $m(\cdot)$  is characterized only implicitly via an integral equation. For identification of  $m$ , it is crucial to know the algebraic properties of an integral operator which is defined on an infinite dimensional functional space. For estimation, we need to solve a random Fredholm integral equation of the first kind. Since there may exist *no* or *more than one* solutions to the random integral equation, a natural estimator can be defined by using a generalized inverse. However, as will be shown later in section 3.1, such estimator is not consistent in general. Inconsistency of such naive estimator, called as ill-posedness of inverse problems, is related to discontinuity of the underlying mapping from a reduced-form to a structural function. For these reasons, adequate statistical theory has not as yet been fully developed for an IV estimator of the nonparametric structural model in (1) through (3). Only a consistency result was shown for a general case of common elements by Newey and Powell (1988, 2003), who also suggested a primitive condition for identification under a parametric assumption of exponential family. For a special case of disjoint  $X$  and  $W$ , Darolles, Florens, and Renault (2001) made some important improvements, succeeding in deriving a lower bound on the convergence rate of their estimates.<sup>2</sup>

This paper, trying to improve upon the previous works, provides a more general approach to identification and estimation of the structural model in (1) through (3). We give a new identification result that does not rely on any parametric assumption. The suggested identifying condition is closely related to richness of the linear space that are generated by marginal discretizations of the

---

<sup>1</sup>As an alternative generalization of the linear 2SLS, the control function approach treats endogeneity of  $X$  as an omitted variable problem, and corrects endogeneity bias by inclusion of some ‘control’ variables ( $\eta$  in the above), as in Heckman(1979)’s two-step estimator for selectivity bias. See Blundell and Powell (2001) for a detailed comparison of two methods.

<sup>2</sup>In a more recent work, Hall and Horowitz (2003) tried to provide deeper results on the convergence rates for nonparametric IV estimation.

joint density function. Under continuity of the density function, the condition is also shown to be necessary for identification. For consistent estimation, a general theory of statistical regularization is developed to find a stable solution to a random Fredholm integral equation of the first kind. In contrast to the ad-hoc approaches in the previous works, we give more systematic analysis of regularization to resolve the ill-posedness of statistical inverse problems. For example, applying random operator theory, we show a minimal set of conditions under which a large class of regularized estimators are consistent. Also, the optimal bounds of the convergence rates, given the accuracies of the preliminary estimates, are derived, using a notion of the modulus of stochastic equicontinuity of a random operator. For comparison of asymptotic properties of various regularization, we calculate the convergence rates of the ordinary/iterated/generalized Tikhonov and Showalter's methods. According to our results, Showalter's method can attain the optimal bounds in a general case, while three types of Tikhonov methods are suboptimal in some cases. A specific example of kernel IV estimates is considered to illustrate how the general theory can be applied in practice. Unlike the previous works, we show an exact closed form of the regularized kernel estimates explicit in a regularization parameter. Computations of the regularized estimates only require standard finite-dimensional matrix operations. The convergence rates of those estimates are derived, based on the general theory of statistical regularization.

There are many works on nonparametric estimation of other structural models. An extensive list can be found in a recent survey by Blundell and Powell (2001a) and the references therein. Some of them, among others, are Altonji and Matzkin (2001), Imbens and Newey (2001), and Chesher (2002) that develop nonparametric methods for nonseparable structural models. Ai and Chen (2003), who consider semiparametric GMM estimation of structural models, show  $\sqrt{n}$ -consistency of parametric terms as well as the semiparametric asymptotic efficiency. In Blundell and Powell (2001b), a control function approach is used for a semiparametric binary response model with endogenous variables. In statistics literature, there are some earlier works on ill-posed inverse problems, such as deconvolution (Fan, 1991) and noisy integral equations (Nychka and Cox, 1989); see the survey by O'Sullivan (1986) and van Rooij and Ruymgaart (1999), for more results. Those works, however, are different from our approach in that they assume a known integral operator. For nonparametric estimation of additive models, Mammen, Linton, and Nielsen (1999) and Linton and Mammen (2003) work with random integral equations, but their inverse problems are well-posed.

The rest of paper proceeds as follows. Section 2 concerns an identification issue, and suggest a general identification condition. In section 3, we first show ill-posedness of the IV estimation

problem, and develop general theory of statistical regularization for consistent estimation, including a discussion for optimal bounds. Section 4 is devoted to derivation of the convergence rates for various regularization methods. Section 5 applies the general results to a specific example of kernel IV estimation. Both closed forms and asymptotic properties of the estimates are shown. The finite sample properties of the estimates are investigated via a small-scale Monte Carlo experiment. All the technical proofs for the theorems are collected in the appendices.

Notations: *w.p.1* (or *a.s.*) stands for ‘with probability one’, and *w.p.a.1*, for ‘with probability approaching to one’.

## 2 Identification

Throughout the paper, we assume that the sample observations  $\{(Y_i, Z_i, W_i): i = 1, 2, \dots, n\}$  are randomly drawn out from a distribution  $F_{Y,Z,W}(Y, Z, W)$  defined on  $\mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{W}$  ( $\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d_z} \times \mathbb{R}^{d_2}$ ), where  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \subset \mathbb{R}^{d_{w_1}} \times \mathbb{R}^{d_{w_2}}$  and  $d_2 = d_{w_1} + d_{w_2}$ . The support of  $X$  is given by  $\mathcal{X} \equiv \mathcal{Z} \times \mathcal{W}_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ , where  $d_1 = d_z + d_{w_1}$ .  $F_{Y,Z,W}(\cdot)$  is assumed to be absolutely continuous with density  $f_{Y,Z,W}(\cdot)$ . The joint density function for  $(Y, W)$  and  $(Z, W)$  is denoted by  $f_{Y,W}(\cdot)$  and  $f_{Z,W}(\cdot)$ , respectively. Let  $L^2(\mathcal{X})$  be the infinite-dimensional Hilbert space of square-integrable functions defined on  $\mathcal{X}$ , with norm given by  $\|m(\cdot)\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 = \int_{\mathcal{X}} m^2(x) dx$ . Below, we give a precise definition for identification of the model. When (3) holds for  $m(\cdot)$  and  $\tilde{m}(\cdot)$ , the two functions are called ‘observationally equivalent’.

**Definition 2.1** The structural function  $m(\cdot)$  in (1) is identified in  $L^2(\mathcal{X})$  by instrumental variables  $W$ , if and only if (3) holds for  $m(\cdot) \in L^2(\mathcal{X})$ , and any observationally equivalent functions,  $m(\cdot)$  and  $\tilde{m}(\cdot)$ , are identical in the sense that  $m(X) = \tilde{m}(X)$ , *w.p.1*.

Given  $F_{Y,Z,W}(\cdot)$  in a class of distributions  $\mathcal{F}$ , we define

$$h_F(w) = \int_{\mathcal{Y}} y f_{Y,W}(y, w) dy,$$

and an integral operator by

$$T_F : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W}), \quad \text{with } (T_F m)(w) = \int_{\mathcal{Z}} m(z, w_1) f_{Z,W}(z, w) dz,$$

where the subscript of  $T$  and  $h$  means that they are defined by the underlying distribution  $F$ . The subscript will be omitted unless confusion arises. For a linear operator  $T : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$ , its operator norm is defined by  $\|T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} \equiv \sup_{m \in L^2(\mathcal{X}), (m \neq 0)} \|Tm\|_{L^2(\mathcal{W})} / \|m\|_{L^2(\mathcal{X})}$ . Throughout

the paper, we assume that the joint density is square-integrable so that the linear operator  $T$  is bounded in the sense of  $\|T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} < \infty$ .  $\mathcal{N}(T)$  and  $\mathcal{R}(T)$  denotes the null space and the range, respectively, of  $T$ . Since two conditions in Def.2.1 are equivalent to existence of a unique solution to ‘ $T_F(m)(w) = h_F(w)$ ’, we get the following result.

**Proposition 2.1** Let  $\mathcal{F}^*$  be such that

$$\mathcal{F}^* = \{F_{Y,Z,W}(\cdot) \in \mathcal{F} : \text{(a) } \mathcal{N}(T_F) = \{0\} \text{ and (b) } h_F \in \mathcal{R}(T_F)\}. \quad (4)$$

Given a model (1)-(3) with a true distribution  $F_{Y,Z,W}^0(\cdot)$ ,  $m(\cdot)$  is identified to be  $T_F^{-1}(h_F)$  in  $L^2(\mathcal{X})$  by the instrumental variables  $W$ , if and only if  $F_{Y,Z,W}^0(\cdot) \in \mathcal{F}^*$ .

Proposition 2.1 makes clear that some distributional assumptions are needed for valid identification. In the previous works, most considerations are given to the uniqueness condition, with less known about existence. For example, as Newey and Powell (2003) noted, the injectivity condition in (4)-(a) is equivalent to statistical completeness of  $F_{Z|W}(\cdot|\cdot)$  in the ‘parameter’  $W$ . Using a parametric distributional assumption that  $F_{Z,W}^0$  is in a class of exponential family, they derived some primitive condition for identifiability. A more flexible nonparametric approach was made by Darolles, Florens, and Renault (2001), under an assumption that there is no common element between  $X$  and  $W$ . Both conditions of uniqueness and existence are discussed in detail, based on singular-values expansion of a compact operator  $T$ . It is shown that an equivalent characterization of (4)-(a) can be given in terms of nonlinear canonical correlations of  $X$  and  $W$ , and the existence condition in (4)-(b) translates into imposing some smoothness on a reduced form function.<sup>3</sup> Unlike Newey and Powell (2003), their results, however, are delimited by a strong restriction that prevents an element of explanatory variables being used as an instrument. One more comment deserves note, concerning the scope of generality of the conditions in (4). Obviously, certain distributional assumptions on  $(Z, W)$  will suffice for identifiability, i.e., for  $T$  to be one-to-one. Existence, however, cannot be ensured in a similar manner, since an operator acting on an infinite-dimensional space does not necessarily possess a closed range, i.e.,  $T$  is not onto in general. It is well known in functional analysis (Kress, 1989, p20) that, given a compact operator  $T$ ,  $\mathcal{R}(T)$  is closed if and only if  $\dim(\mathcal{R}(T)) < \infty$ . Therefore, what one can expect as most favorable to (4)-(b) will be that  $T$  has a dense range in  $L^2(\mathcal{W})$ . In the rest of this section, we provide an alternative but more general identification result, showing when  $T$  is one-to-one or has a dense range. Noncompactness of  $T$  is allowed.

---

<sup>3</sup>That is, the generalized Fourier coefficients of  $h$  (w.r.t. the singular functions) decay fast enough relative to the singular values.

For convenience of exposition, we first consider a case with disjoint  $X$  and  $W$ , and then give an extension to a common-element case. Given  $\{\omega_l\}_{l=1}^L \subset \mathcal{W}$ , we define a marginal discretization (w.r.t.  $W$ ) of a joint density function, by

$$f_L^\omega(x) = [f_{X,W}(x, \omega_1), \dots, f_{X,W}(x, \omega_L)]',$$

and let  $\text{lin}(\{f_L(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^L)$  be the linear space generated by  $\{f_L(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^L$ . For a sequence  $\{\omega_l\}_{l=1}^\infty \subset \mathcal{W}$ , let  $\overline{\text{lin}}\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^\infty$  be the closure of  $\text{lin}\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^\infty$  in  $L^2(\mathcal{X})$ , and  $[\text{lin}\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^\infty]^\perp$  the orthogonal complement of  $\text{lin}\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^\infty$ , i.e.,

$$L^2(\mathcal{X}) = \overline{\text{lin}}\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^\infty \oplus [\text{lin}\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^\infty]^\perp.$$

Our identification results make use of the following conditions.

**C.2.1** For a sequence  $\overline{\mathcal{W}} = \{\omega_l\}_{l=1}^\infty \subset \mathcal{W}$ ,  $\text{lin}\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^\infty$  is dense in  $L^2(\mathcal{X})$ ; i.e.,

$$\overline{\text{lin}}\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^\infty = L^2(\mathcal{X}).$$

**C.2.2** For a sequence  $\overline{\mathcal{X}} = \{\varkappa_l\}_{l=1}^\infty \subset \mathcal{X}$ ,  $\text{lin}\{f_{X,W}(\varkappa_l, \cdot)\}_{l=1}^\infty$  is dense in  $L^2(\mathcal{W})$ ; i.e.,

$$\overline{\text{lin}}\{f_{X,W}(\varkappa_l, \cdot)\}_{l=1}^\infty = L^2(\mathcal{W}).$$

Both conditions address richness of the linear spaces that are generated by marginal discretizations of the joint density function. C.2.1 will hold, if a complete orthogonal basis of  $L^2(\mathcal{X})$  is generated by linear combinations of  $\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^\infty$ . We below show sufficiency of C.2.1 and C.2.2 for  $T$  to be one-to-one and have a dense range, respectively.

**Theorem 2.2** Suppose that a structural model is given by (1)-(3) with  $W_1$  empty.

(i) If C.2.1 holds, then, the integral operator  $T : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  is one-to-one, i.e.,  $m(\cdot)$  is identifiable in  $L^2(\mathcal{X})$ .

(ii) If C.2.2 holds, then,  $T$  has a dense range in  $L^2(\mathcal{W})$ ; i.e., at least one  $m(\cdot) \in L^2(\mathcal{X})$  satisfies the given structural model, for  $h(\cdot)$  in some ‘dense’ subspace.

Symmetry of two conditions in Theorem 2.2 can be explained easily by introducing an adjoint operator. If  $G : M \rightarrow H$  is a bounded linear operator from a Hilbert space  $M$  to a Hilbert space

$H$ , the adjoint of  $G$  is the operator  $G^* : H \rightarrow M$  satisfying  $\langle Gm, h \rangle_M = \langle m, G^*h \rangle_H$ , for all  $m \in M$  and  $h \in H$ , where  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$  is the inner product of  $M$ . In the present case, the adjoint of  $T : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  is  $T^* : L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})$  with  $(T^*h)(x) = \int f_{X,W}(x, w)h(w)dw$ . From the relation ‘ $\overline{\mathcal{R}}(T) = \mathcal{N}^\perp(T^*)$ ’,  $T$  has a dense range, if and only if  $T^*$  is one-to-one. In consequence, the second assertion of Theorem 2.2 follows as a mirror image, once the first is true. The suggested identifying condition seems rather abstract, partly because we do not use any parametric assumptions. Roughly speaking, identifiability depends on the way that the density function of  $X$ , conditional on  $W = \omega_l$ , varies over different values of  $\omega_l$ 's.<sup>4</sup> For example, the model is identifiable, if some sequence of the conditional density functions,  $\{f_{X|W}(\cdot|\omega_l)\}_{l=1}^\infty$ , includes (or spans) a complete basis of  $L^2(\mathcal{X})$ . Although it is not easy to check the condition in a practical case, it allows for a useful finite-dimensional approximation of the underlying structural function. Let  $P_{f_L^\omega}$  be the orthogonal projection onto  $\text{lin}(\{f_{X,W}(x, \omega_l)\}_{l=1}^L)$ ;

$$(P_{f_L^\omega}m)(x) = f_L^\omega(x)'Q_\omega^{*\dagger} \int_{\mathcal{X}} f_L^\omega(z)m(z)dz,$$

where  $Q_\omega^* = \int_{\mathcal{X}} f_L^\omega(z)f_L^\omega(z)'dz$ . Suppose that the joint distribution  $F_{Y,Z,W}$  is known, i.e., we know both the density function  $f_{X,W}(\cdot, \cdot)$  and the reduced form  $h(\cdot)$ . Then, from  $h_L^\omega = [h(\omega_1), \dots, h(\omega_L)]' = \int_{\mathcal{X}} f_L^\omega(z)m(z)dz$ , we can calculate the exact form of the projection of  $m$  via

$$(P_{f_L^\omega}m)(x) = f_L^\omega(x)'Q_\omega^{*\dagger}h_L^\omega. \tag{5}$$

If C.2.1 holds, the above projection delivers a valid approximation of  $m$ , since  $\|P_{f_L^\omega}m - m\|_{L^2(\mathcal{X})} \rightarrow 0$ , as  $L \rightarrow \infty$ , under denseness of the linear span of  $\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^\infty$ . Identifiability of  $m$  is now obvious from uniqueness of the limit of a convergent sequence in a Hilbert space. In mathematical literature, the method of moment collocation uses (5) to find a numerical solution to an integral equation—see Kress (1989, p. 267), for example. The following theorem concerns necessariness of C.2.1 for identifiability. Under a weak condition on a joint density function, it shows that C.2.1 should hold for any ‘dense’ discretization points, when the model is identified.

**Theorem 2.3** Suppose that a structural model is given by (1)-(3) with  $W_1$  empty. In addition, assume that  $f_{X,W}(\cdot, \cdot)$  is continuous on  $\mathcal{X} \times \mathcal{W}$ .

- (i) If  $m(\cdot)$  is identifiable, then, C.2.1 holds for any dense subset  $\overline{\mathcal{W}}$  of  $\mathcal{W}$ .
- (ii) If  $T$  has a dense range in  $L^2(\mathcal{W})$ , then, C.2.2 holds for any dense subset  $\overline{\mathcal{X}}$  of  $\mathcal{X}$ .

---

<sup>4</sup>Here,  $f_{X,W}(\cdot, \omega_l)$  is normalized implicitly by  $f_W(\omega_l)$  so that  $\int_{\mathcal{X}} f_{X,W}(x, \omega_l)/f_W(\omega_l)dx = 1$ .

The symmetry argument also applies to Theorem 2.3. We remark that the conclusions of Theorem 2.3 are not stronger, in its context, than the assumptions of Theorem 2.2, since the former does not extend to general discretization points other than a dense subset of  $\mathcal{W}$ . For an immediate application of the above results, one may consider a joint density function,  $f_{X,W}(x,w) = \sum_{k=1}^K p_k(x)q_k(w)$ . This includes a trivial case with  $X$  independent of  $W$ . Since  $\text{lin}\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^\infty$  is at most of  $K$ -dimension, C.2.1 is violated for any  $\overline{\mathcal{W}}$  in  $\mathcal{W}$ , so the model is not identifiable. Another implication of Theorem 2.3 concerns validity of  $\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^\infty$  as approximating functions. It shows, under identifiability of  $m$ , that the finite-dimensional approximation in (5) will be consistent, if the sequence  $\{\omega_l\}_{l=1}^L$  becomes dense in  $\mathcal{W}$  as  $L \rightarrow \infty$ . The moment collocation method showed a similar but more general result by applying theory of a reproducing kernel Hilbert space; see Nashed and Wahba (1974). Our development here is much simpler, only based on Theorem 2.3.

We close the section by extending the above results to a case where  $X$  and  $W$  have some common elements of  $W_1$ . A slight modification of C.2.1 and 2.2 is enough to obtain the same conclusions.

**C.2.3** For all  $w_1 \in \mathcal{W}_1$ , there exists a sequence  $\{\omega_{2l}\}_{l=1}^\infty \subset \mathcal{W}_2$  such that  $\text{lin}\{f_{Z,W_1,W_2}(\cdot, w_1, \omega_{2l})\}_{l=1}^\infty$  is dense in  $L^2_{\mathcal{Z}}$ .

**C.2.4** For all  $w_1 \in \mathcal{W}_1$ , there exists a sequence  $\{\xi_l\}_{l=1}^\infty \subset \mathcal{Z}$  such that  $\text{lin}\{f_{Z,W_1,W_2}(\xi_l, w_1, \cdot)\}_{l=1}^\infty$  is dense in  $L^2_{\mathcal{W}_2}$ .

**Theorem 2.4** Suppose that a structural model is given by (1)-(3) with  $W_1$  possibly not empty.

(i) If C.2.3 holds, then, the integral operator  $T : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  is one-to-one; i.e.,  $m(\cdot)$  is identifiable in  $L^2(\mathcal{X})$ .

(ii) If C.2.4 holds, then,  $T$  has a dense range in  $L^2(\mathcal{W})$ ; i.e., at least one  $m(\cdot) \in L^2(\mathcal{X})$  satisfies the given structural model, for  $h(\cdot)$  in some ‘dense’ subspace.

Extension of Theorem 2.3 is done in a similar way. In this case, C.2.3 and C.2.4 holds for any dense subset  $\{\omega_{2l}\}_{l=1}^\infty$  and  $\{\xi_l\}_{l=1}^\infty$ , respectively. We omit the details, since they are straightforward.

### 3 Statistical Theory of Regularization for Ill-Posed Problems

This section considers statistical estimation of a structural function which we assume to be identified by  $m_0 = T^{-1}(h_0)$ , where  $h_0(w) = \int_{\mathcal{Y}} y f_{Y,W}^0(y, w) dy$  and  $(Tm)(w) = \int_{\mathcal{Z}} m(z, w_1) f_{Z,W}^0(z, w) dz$ . In mathematics theory for integral equations, it has been a central issue how to estimate  $m_0$  from an approximate of  $h_0$ , when  $T$  is known. Ill-posedness of such inverse problems is now well known in the literature, and can be treated by regularization theory. Our statistical problems are more complicated, since the operator itself needs to be estimated. Some additional works are required, if one wants to apply regularization theory for solving an integral equation of a random operator. Newey and Powell (1988, 2003), Darolles, Florens, and Renault (2001), and Hall and Horowitz (2003) have recently attacked the issue, showing consistency and the convergence rates of their estimators. Those methods, categorized as (the classical or ordinary) Tikhonov regularization, possess a common form of ridge estimation which turns out be suboptimal in some cases. This paper takes a more general approach to the statistical inverse problems, trying to extend regularization theory into random integral equations. The statistical issues, such as consistency, optimal bounds, and the convergence rates, are discussed with no limitation on specific estimation of  $h_0$  or  $T$ .

#### 3.1 Generalized Inverse and Ill-Posed Problems

In a practical case where  $h_0$  and  $f_{Z,W}^0$  are unknown, approximate characterization of  $m_0$  relies necessarily on some preliminary estimates,  $\hat{h}_{0,n}$  and  $\hat{f}_{Z,W}$ , given an observed sample  $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^n$ . The actual problem to be solved is a ‘random’ Fredholm integral equation of the first kind,

$$(\hat{T}_n m)(w) \equiv \int_{\mathcal{Z}} m(z, w_1) \hat{f}_{Z,W,n}(z, w) dz = \hat{h}_{0,n}(w). \quad (6)$$

Like mathematical inverse problems, several difficulties arise in estimating  $m_0$  by inverting  $\hat{h}_{0,n}$  through  $\hat{T}_n$ . Estimation of  $T$  is usually carried out by a certain discretization scheme-i.e., by determining finitely many unknowns. Since, in that case,  $\hat{T}_n$  is generally of finite rank, it is likely that  $\hat{h}_{0,n} \notin \mathcal{R}(\hat{T}_n)$ , or  $\hat{T}_n$  is not invertible.<sup>5</sup> The integral equation in (6) may possess *no* or *more than one* solutions. A common practice in econometric theory is to extend the notion of solution to the idea

---

<sup>5</sup>An operator  $G$  has a finite rank, if  $\dim[\mathcal{R}(G)] < \infty$ . It is obvious that any integral operator with a degenerate kernel is of finite rank. Throughout the paper, it will be assumed implicitly that  $\dim[\mathcal{R}(\hat{T}_n)] < \infty$ , for  $n$  fixed, unless otherwise stated.

of the best approximation, based on minimum-distance. Given  $\widehat{h}_{0,n}$  and  $\widehat{T}_n$ , the minimum-distance estimator of  $m_0$  is defined by

$$\widehat{m}_n^\dagger = \arg \min_{m(\cdot) \in L^2(\mathcal{X})} \|\widehat{T}_n m - \widehat{h}_{0,n}\|_{L^2(\mathcal{W})}^2, \quad (7)$$

where  $\widehat{m}_n^\dagger$  is the solution of minimum norm, unless the minimum-distance estimator is unique. The underlying mapping from  $\widehat{h}_{0,n}$  to  $\widehat{m}_n^\dagger$  is so called the (Moore-Penrose) generalized inverse of  $\widehat{T}_n$ ;

$$\widehat{m}_n^\dagger = \widehat{T}_n^\dagger(\widehat{h}_{0,n}),$$

where  $\widehat{T}_n^\dagger$  is such that  $\widehat{T}_n \widehat{T}_n^\dagger \widehat{T}_n = \widehat{T}_n$ . From the first order condition of (7), it follows that  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n \widehat{m}_n^\dagger = \widehat{T}_n^* \widehat{h}_{0,n}$ , leading to  $\widehat{T}_n^\dagger = (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^\dagger \widehat{T}_n^*$ , where  $\widehat{T}_n^* : L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})$  is the adjoint of  $\widehat{T}_n : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$ . The generalized inverse of  $\widehat{T}_n$  has a domain given by  $\mathcal{R}^\perp(\widehat{T}_n) \oplus \mathcal{R}(\widehat{T}_n)$ ; see Groetsch (1993, p.80), for example. Since  $\mathcal{R}(\widehat{T}_n)$  is finite-dimensional and thus closed, it holds that  $\mathcal{R}^\perp(\widehat{T}_n) \oplus \mathcal{R}(\widehat{T}_n) = L^2(\mathcal{W})$ , for any fixed  $n$ . That is,  $\widehat{m}_n^\dagger$  is well defined for any  $\widehat{h}_{0,n} \in L^2(\mathcal{W})$ . When  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$  is one-to-one on the range space of  $\widehat{T}_n^*$ , the minimum distance estimator is simplified to  $\widehat{m}_n^\dagger = (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{-1} \widehat{T}_n^* \widehat{h}_{0,n}$ .

**Remark 3.1** (*Closed form of solutions*) Although  $\widehat{m}_n^\dagger$  serves as an approximate solution to (6), it may seem elusive to find the exact functional form of  $\widehat{m}_n^\dagger$ . Below in section 5, we show that it is possible to derive the exact closed form of  $\widehat{m}_n^\dagger$ , when  $h_0$  and  $f_{Z,W}$  are estimated by the kernel smoothing method. Instead of the exact form of  $\widehat{m}_n^\dagger$ , one may try to define an alternative minimum-distance estimator, by discretizing (6) on collocation points, say,  $\{\omega_l\}_{l=1}^L \subset \mathcal{W}$ . With  $\widehat{T}_{n,L}^\omega : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{R}^L$  defined by  $\widehat{T}_{n,L}^\omega(m) = [(\widehat{T}_n m)(\omega_1), \dots, (\widehat{T}_n m)(\omega_L)]'$ , the relevant minimization problem is

$$\widetilde{m}_{n,L}^\dagger = \arg \min_{m(\cdot) \in L^2(\mathcal{X})} \|\widehat{T}_{n,L}^\omega m - \widehat{h}_L^\omega\|_{\mathbb{R}^L}^2 = \arg \min_{m(\cdot) \in L^2(\mathcal{X})} \sum_{l=1}^L [(\widehat{T}_n m)(\omega_l) - \widehat{h}_{0,n}(\omega_l)]^2,$$

where  $\widehat{h}_L^\omega = [\widehat{h}_{0,n}(\omega_1), \dots, \widehat{h}_{0,n}(\omega_L)]$ . The closed form of  $\widetilde{m}_{n,L}^\dagger$  is available, regardless of an estimation method used for  $h_0$  and  $f_{Z,W}$ . When  $X$  and  $W$  are disjoint, the minimum distance estimator is exactly of the same form as (5) with  $h_0$  and  $f_{Z,W}$  replaced by their estimates

$$\widetilde{m}_{n,L}^\dagger(x) \equiv \widehat{T}_{n,L}^{\omega\dagger}(\widehat{h}_L^\omega) = \widehat{f}_L^\omega(x)' \widehat{Q}_\omega^* \widehat{h}_L^\omega,$$

where  $\widehat{f}_L^\omega(x) = [\widehat{f}_{X,W}(x, \omega_1), \dots, \widehat{f}_{X,W}(x, \omega_L)]$ , and  $Q_\omega^* = \int_{\mathcal{X}} f_L^\omega(u) f_L^\omega(u)' du$ . ■

Consistency of the natural estimator  $\widehat{m}_n^\dagger$ , however, is not ensured by consistency of the preliminary estimates  $\widehat{h}_{0,n}$  and  $\widehat{T}_n$ . For clarity of the statement, we need to define statistical properties of random

operators. As usual,  $\widehat{h}_{0,n}$  is said to be ( $L^2$ -) consistent for  $h_0$ , if and only if  $\|\widehat{h}_{0,n} - h_0\|_{L^2(\mathcal{W})} \xrightarrow{p} 0$ , as  $n \rightarrow \infty$ .

**Definition 3.1** (i) A random operator  $\widehat{T}_n : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  is consistent for  $T : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$ , if and only if  $\|\widehat{T}_n m - Tm\|_{L^2(\mathcal{W})} \xrightarrow{p} 0$ , for all  $m \in L^2(\mathcal{X})$ , i.e.,  $\widehat{T}_n$  converges pointwise to  $T$  (in  $L^2(\mathcal{X})$ ) in probability. (ii)  $\widehat{T}_n$  is uniformly consistent for  $T$  on  $\mathcal{M}_X \subset L^2(\mathcal{X})$ , if and only if  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathcal{M}_X, m \neq 0} \|\widehat{T}_n m - Tm\|_{L^2(\mathcal{W})} / \|m\|_{L^2(\mathcal{X})} = 0$ , i.e.,  $\widehat{T}_n$  converges to  $T$  uniformly on  $\mathcal{M}_X$ , in probability.

Recalling the definition of  $\|\widehat{T}_n - T\|_{\mathcal{M}_X \rightarrow L^2(\mathcal{W})}$ , uniform convergence in Definition 3.1(ii) with  $\mathcal{M}_X = L^2(\mathcal{X})$  is equivalent to convergence in operator norm. Asymptotic properties of  $\widehat{m}_n^\dagger$  are explained from the decomposition

$$\widehat{T}_n^\dagger(\widehat{h}_{0,n}) - m_0 = \widehat{T}_n^\dagger[\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0] + [(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^\dagger \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n - I]m_0. \quad (8)$$

The term in the first square bracket, written as  $(\widehat{h}_{0,n} - h_0) - (\widehat{T}_n - T)m_0$ , represents the composite errors associated with estimation of  $h_0$  and  $T$ . The term will converge to zero in  $L^2$ -norm, if  $\widehat{h}_{0,n}$  and  $\widehat{T}_n$  are consistent. The second term, due to non-invertibility of  $\widehat{T}_n$ , reduces to  $-P_{\mathcal{N}(\widehat{T}_n)} m_0$ , by the identity  $(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^\dagger \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n = I - \widehat{P}_{\mathcal{N}(\widehat{T}_n)}$ , where  $P_{\mathcal{N}(\widehat{T}_n)}$  is the orthogonal projector onto  $\mathcal{N}(\widehat{T}_n)$ ; see Nashed (1976). or Groetsch (1977). Applying Lemma 3.1 in the appendix, we can show that the second term converges to zero in probability, under consistency of  $\widehat{T}_n$  and invertibility of  $T$ . For consistency of  $\widehat{m}_n^\dagger$ , it remains crucial to know whether  $\widehat{T}_n^\dagger$  is bounded uniformly in  $n$ . If  $\|\widehat{T}_n^\dagger\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} = O_p(1)$ , consistency of  $\widehat{m}_n^\dagger$  will follow from a direct extension of the Slutsky Theorem to infinite-dimensional spaces. The following result, however, shows that uniform boundedness of  $\widehat{T}_n^\dagger$  does not obtain in a fairly regular situation.

**Proposition 3.1** Suppose that  $T : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  is one-to-one, and  $\widehat{T}_n$  has a finite rank. Assume that  $\widehat{T}_n : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  is uniformly consistent for  $T$  on  $\mathcal{M}_X \subset L^2(\mathcal{X})$  s.t.  $\dim(\mathcal{M}_X) = \infty$ . Then,

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{T}_n^\dagger\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} = \infty.$$

The only binding condition in Proposition 3.1 is uniform convergence of  $\widehat{T}_n$  to  $T$  on some infinite-dimensional subspace of  $L^2(\mathcal{X})$ , which in fact holds under a quite regular condition such that  $\widehat{f}_{Z,W,n}(\cdot, \cdot)$  converges to the truth in  $L^2$ -norm. To see this, we just observe that, by Cauchy-Schwartz

inequality, for all  $m(\cdot) \in L^2(\mathcal{X})$ ,

$$\begin{aligned} \|(\widehat{T}_n - T)m\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 &\leq \| \|\widehat{f}_{Z,W,n}(z, w) - f_{Z,W}(z, w)\|_{L^2(\mathcal{Z})} \|m(z, w_1)\|_{L^2(\mathcal{Z})} \|_{L^2(\mathcal{W})}^2 \\ &\leq \| \|\widehat{f}_{Z,W}(\cdot) - f_{Z,W}(\cdot)\|_{L^2(\mathcal{Z} \times \mathcal{W})} \|m\|_{L^2(\mathcal{X})} \|^2, \end{aligned} \quad (9)$$

i.e.,  $\|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} \leq \| \|\widehat{f}_{Z,W}(\cdot) - f_{Z,W}(\cdot)\|_{L^2(\mathcal{Z} \times \mathcal{W})} \|$ . With no strong restrictions imposed, Proposition 3.1 characterizes asymptotic unboundedness of  $\widehat{T}_n^\dagger$  as a generic property. It does not mean inconsistency of  $\widehat{m}_n^\dagger$  automatically, since uniform boundedness of  $\widehat{T}_n^\dagger$  is not a necessary condition for consistency.<sup>6</sup> However, the estimator, in general, lacks stability w.r.t. the statistical errors in  $\widehat{T}_n$  or  $\widehat{h}_{0,n}$ . Even small perturbations of  $\widehat{T}_n$  or  $\widehat{h}_{0,n}$  may result in unacceptably large errors in  $\widehat{m}_n^\dagger = \widehat{T}_n^\dagger(\widehat{h}_{0,n})$ . Since  $\widehat{T}_n^\dagger$  becomes more explosive as  $n \rightarrow \infty$ , the approximate solutions may get worse, as more observations (and thus more discretizations) are used in estimating  $\widehat{T}_n$  and  $\widehat{h}_{0,n}$ . In this sense, the estimation problem in (6) is called *statistically ill-posed*. It needs to be pointed out that such ill-posedness occurs, because the underlying mapping from a reduced form to a structural function is not continuous. By Bounded Inverse Theorem, the inverse operator  $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \rightarrow L^2(\mathcal{X})$  is bounded (i.e., continuous), if and only if  $\mathcal{R}(T)$  is closed. In infinite dimensional Hilbert spaces,  $\mathcal{R}(T)$  is closed, only when  $T$  has a degenerate kernel such as  $f_{Z,W}(z, w) = \sum_{k=1}^K p_k(z)q_k(w)$ . We showed that such density functions are excluded by identifiability. It then appeals to our intuition that  $\widehat{T}_n^\dagger$  will be unbounded, as  $\widehat{T}_n$  gets close to  $T$ .

### 3.2 Consistent Estimation by Regularization

Difficulties in the estimation problem (6) are closely related to the smoothing effects of the (estimated) integral operator. Since nonsmooth components, like cusps or edges, in  $m$  are smoothed out by integration, the reverse operation will amplify any high-frequency parts of  $\widehat{h}_{0,n}$ , just as simple differentiation does. Considering that the estimation errors in  $\widehat{h}_{0,n}$  correspond to such high-frequency parts, naive inversion of  $\widehat{h}_{0,n}$  may end up with extremely large errors in estimating  $m$ . From this observation, two points are essential in dealing with an ill-posed problem. Firstly, to cure the instability problem, one needs to be able to filter out the high-frequency components of  $\widehat{h}_{0,n}$ , in a controllable way. Secondly, such filtering should not make substantial loss of information in restoring a true solution. The first problem is resolved by ‘regularization’ that amounts to a bounded approximation of the unbounded inverse operator. For the second, certain ‘smoothness’ needs to be imposed on a true

---

<sup>6</sup>Consistency of  $\widehat{m}_n^\dagger$  depends on whether  $\|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})}$  converges to zero at a faster rate than the square-root of the minimum eigenvalue of  $\widehat{T}_n \widehat{T}_n^*$  decays.

solution, since the loss of information due to a bounded approximation concentrates on nonsmooth components. The following example shows how one can make use of additional knowledge about smoothness of  $m(\cdot)$  to regularize an ill-posed problem.

**Example 3.1** (*the classical Tikhonov regularization; compactification*) Suppose that the true solution  $m_0$  is continuously differentiable, having square-integrable derivatives. A set of admissible solutions is now given by  $\mathcal{M}_X^B = \{m(\cdot) \in L^2(\mathcal{X}) : \|m\|_{L^2(\mathcal{X})} + \|m'\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq B, \text{ for some } B > 0\}$ , where  $m$  is of bounded Sobolev norm. Since  $\mathcal{M}_X^B$  is compact in  $L^2(\mathcal{X})$  by the Sobolev Imbedding Theorem, the (injective) operator  $T$ , when restricted to  $\mathcal{M}_X^B$ , has a ‘bounded’ inverse, say,  $T|_{\mathcal{M}_X^B}^{-1}$ .<sup>7</sup> That is, an ill-posed problem can be regularized via compactification. Stable approximation of  $m_0$  is possible, if the ‘bounded’ operator,  $T|_{\mathcal{M}_X^B}^{-1}$  can be estimated consistently. Letting  $\widehat{T}|_{\mathcal{M}_X^B}$  be a restriction of  $\widehat{T}_n$  on  $\mathcal{M}_X^B$ , we define an estimator by  $\widehat{m}_n^B = \widehat{T}|_{\mathcal{M}_X^B}^\dagger(\widehat{h}_{0,n})$ , where  $\widehat{T}|_{\mathcal{M}_X^B}^\dagger$  is the Moore-Penrose generalized inverse of  $\widehat{T}|_{\mathcal{M}_X^B}$ . Comparing to (7),  $\widehat{m}_n^B$  comes from solving constrained minimum-distance; for  $B > 0$ ,

$$\widehat{m}_n^B = \arg \min_{m(\cdot) \in L^2(\mathcal{X})} \|\widehat{T}_n m - \widehat{h}_{0,n}\|_{L^2(\mathcal{W})} \quad \text{s.t.} \quad \|m\|_{L^2(\mathcal{X})} + \|m'\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq B. \quad (10)$$

For fixed  $B$ ,  $\widehat{T}|_{\mathcal{M}_X^B}^\dagger$  is uniformly bounded, and hence consistency of  $\widehat{T}|_{\mathcal{M}_X^B}$  and  $\widehat{h}_{0,n}$  is sufficient for consistency of  $\widehat{m}_n^B$ . (10) shows clearly that a filtering effect is achieved by damping out highly-oscillating parts of the approximate solutions. In Newey and Powell (2003), (10) was combined with orthogonal series expansions, to define a regularized nonparametric 2SLS estimator. ■

An implicit regularization effect is used in the compactification method by imposing integral bounds on the derivatives. An alternative but more general class of regularization methods are generated by a direct way of bounded approximation for the inverse operator  $T^{-1}$ . As a sensible modification of  $\widehat{T}_n^\dagger = (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^\dagger \widehat{T}_n^*$ , we suggest a family of bounded operators

$$\widehat{R}_{\alpha,n} = U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^*, \quad \alpha > 0 \quad (11)$$

that satisfies:

- (a)  $U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)$  is close to  $(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^\dagger$ , for small  $\alpha$ , in the sense that  $\widehat{R}_{\alpha,n} \widehat{T}_n$  converges pointwise to the identity,  $I$ , in  $L^2(\mathcal{X})$ , and
- (b)  $U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)$  is uniformly bounded (in  $n$ ) by a known function of  $\alpha$ , say,  $1/\alpha$ .

---

<sup>7</sup>Let  $T|_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \subset L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  be a restriction of a bounded injective operator,  $T : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$ . If  $\mathcal{K}$  is compact in  $L^2(\mathcal{X})$ , then,  $T|_{\mathcal{K}}^{-1} : \mathcal{R}(T|_{\mathcal{K}}) \rightarrow \mathcal{K}$ , is continuous, by *Tikhonov’s theorem*-see Groetsch (1993, p.79).

By the former condition,  $\widehat{R}_{\alpha,n}$  (with  $\alpha$  small) serves as an approximation of  $T^{-1}$ , as  $\widehat{T}_n^\dagger$  does. The second condition means that  $\widehat{R}_{\alpha,n}$ , unlike  $\widehat{T}_n^\dagger$ , is stabilized through a newly-introduced term  $\alpha$  called a regularization parameter. Note that, in contrast to  $\widehat{T}_n^\dagger|_{\mathcal{M}_X^{\mathcal{B}}}$ , boundedness of  $\widehat{R}_{\alpha,n}$  is controlled in an explicit way, via the regularization parameter. To guarantee the properties of (a) and (b), we will need the following conditions on  $U_\alpha(\cdot)$  that are borrowed from mathematical regularization theory.

**Condition 3.1** Let  $\bar{\lambda} \equiv \sup_{n \geq n_0} \|\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}$ . A parameter dependent family of continuous functions,  $\{U_\alpha(\cdot)\}_{\alpha > 0}$ , defined on  $(0, \bar{\lambda}]$ , satisfy that (i)  $\sup_{\lambda \in (0, \bar{\lambda})} |U_\alpha(\lambda)\lambda| \leq C < \infty$ , for  $\alpha > 0$ , (ii)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} U_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ , for all  $\lambda \in (0, \bar{\lambda}]$ , and (iii)  $\sup_{\lambda \in (0, \bar{\lambda})} |U_\alpha(\lambda)| = O(\frac{1}{\alpha})$ , as  $\alpha \rightarrow 0^+$ .<sup>8</sup>

From the fact that  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$  is self-adjoint,  $U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)$  is well defined based on spectral theory for self-adjoint linear operators, as long as the real-valued function  $U_\alpha(\cdot)$  is defined on the spectrum of  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$ . Since the random operator  $\widehat{T}_n$  in practice is of finite rank and thereby compact, it is sufficient to define  $U_\alpha(\cdot)$  on a bounded interval,  $(0, \bar{\lambda}]$ , where  $\bar{\lambda} = \sup_{n \geq n_0} \|\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}$ . For such  $U_\alpha(\cdot)$ , an approximate solution to (6) is defined by

$$\widehat{m}_{\alpha,n} = \widehat{R}_{\alpha,n} \widehat{h}_{0,n} = U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* \widehat{h}_{0,n}, \quad (12)$$

which we call a regularized IV estimator of  $m_0$ . In Lemma 3.2 of the appendix, we show that, for  $U_\alpha(\cdot)$  satisfying C.3.1, two properties of (a) and (b) in the above hold with  $\|\widehat{R}_{\alpha,n}\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} = O_{as}(\alpha^{-1/2})$ , whenever  $\widehat{T}_n$  converges pointwise to the true (injective) operator  $T$  in  $L^2(\mathcal{X})$ . To see the implications, we consider an error decomposition of the regularized estimates, which is given, similar to (8), by

$$\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0 = \widehat{s}_\alpha + \widehat{b}_\alpha \equiv \widehat{R}_{\alpha,n}(\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0) + [U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n - I] m_0. \quad (13)$$

The first term corresponds to propagation of the composite errors, and the second, an extra error term due to regularization. From uniform boundedness of  $\widehat{R}_{\alpha,n}$  (by  $1/\sqrt{\alpha}$ ), it follows that  $\widehat{s}_\alpha$  converges to zero in probability, if the decaying rate of  $\sqrt{\alpha}$  is slower than the convergence rates of  $\widehat{h}_{0,n}$  and  $\widehat{T}_n$ . Negligibility of  $\widehat{b}_\alpha$  (as  $\alpha \rightarrow 0$ ) is obvious from the property (a), i.e., from pointwise convergence of  $U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$  to  $I$  in  $L^2(\mathcal{X})$ . In sum, given consistency of  $\widehat{T}_n$  and  $\widehat{h}_{0,n}$ , the regularization methods in (11), with  $U_\alpha(\cdot)$  satisfying C.3.1, yield consistent estimation of  $m_0$ , for some choices of a regularization parameter,  $\alpha = \alpha(n)$ , converging to zero.

**Theorem 3.2** Suppose that  $U_\alpha(\cdot)$  satisfies C.3.1, and the linear operator  $\widehat{T}_n : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  has a finite rank. Also, assume that  $\|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} \xrightarrow{p} 0$ , and  $\widehat{T}_n$  is a consistent estimator for

<sup>8</sup>Section 4 gives a detailed discussion about several examples of  $U_\alpha(\cdot)$  satisfying C.3.1.

the true operator  $T : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  which is bounded and injective. If  $\alpha = \alpha(n)$  is such that  $\alpha(n) \rightarrow 0$  and  $\|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} / \sqrt{\alpha(n)} \xrightarrow{p} 0$ , as  $n \rightarrow \infty$ , then,  $\|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \xrightarrow{p} 0$ , as  $n \rightarrow \infty$ , for all  $m_0 \in L^2(\mathcal{X})$ .

In contrast to Example 3.1, the consistency result of Theorem 3.2 applies to any square-integrable function,  $m_0 \in L^2(\mathcal{X})$ , with no constraint on smoothness of  $m_0$ . It instead requires implicitly to know the convergence rate of the composite errors,  $\zeta_n \equiv \widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0$ . For standard nonparametric procedures, such rate will be available under some smoothness conditions on  $h_0$  and  $f_{Z,W}$ . An immediate choice of  $\alpha = \alpha(n)$  follows, for example, from (9) which, together with the triangle inequality, leads to

$$\|\zeta_n\|_{L^2(\mathcal{W})} \leq \|\widehat{h}_{0,n} - h_0\|_{L^2(\mathcal{W})} + C\|\widehat{f}_{Z,W} - f_{Z,W}\|_{L^2(\mathcal{Z} \times \mathcal{W})}^2,$$

for  $m_0 \in L^2(\mathcal{X})$  with  $\|m_0\| \leq C < \infty$ . Under the identification relation ( $h_0 = Tm_0$ ), a reduced form function is equivalent to an integral of the underlying structural function, so, it will satisfy some smoothness automatically, if  $f_{Z,W}(\cdot)$  does.

**Remark 3.2** (*strong  $L^2$ -consistency of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$* ) It is possible to show a strong form of Theorem 3.2 with an replacement of ‘ $\xrightarrow{p}$ ’ by ‘ $\xrightarrow{as}$ ’, through a straightforward extension of the proofs for Lemma 3.1 and 3.2 in the appendix. Suppose that  $\widehat{h}_{0,n}$  and  $\widehat{f}_{Z,W}$  are strongly  $L^2$ -consistent for  $h_0$  and  $f_{Z,W}$ , respectively, in the sense that  $\|\widehat{h}_{0,n} - h_0\|_{L^2(\mathcal{W})} = o_{as}(1)$ , and  $\|\widehat{f}_{Z,W} - f_{Z,W}\|_{L^2(\mathcal{Z} \times \mathcal{W})}^2 = o_{as}(1)$ . Again, from (9), the latter condition implies  $\|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} = o_{as}(1)$ , which is sufficient for Lemma 3.1 as well as Lemma 3.2.(iii) to hold almost surely. In consequence, strong  $L^2$ -consistency of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$  obtains, under  $\alpha = \alpha(n) \rightarrow 0$  such that  $\|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} / \sqrt{\alpha(n)} \xrightarrow{as} 0$ . ■

### 3.3 Smoothness Condition and Optimal Bounds

Smoothness of  $m_0$  needs to be assumed for further asymptotic properties of the estimators. Following mathematical regularization theory, this section introduces an abstract smoothness condition, based on a sourcewise-representation of  $m_0$ . Use of such condition is illustrated by deriving some lower bounds on the convergence rates for the estimators in (12). The same smoothness condition turns out to play a crucial role in defining new optimal bounds. More analyses of the convergence rates will be given in the next section.

In Theorem 3.2, we already discussed the convergence rate of the first term in (13). The  $L^2$ -norm of  $\widehat{s}_\alpha$  is determined by the noise level,  $\|\zeta_n\|_{L^2(\mathcal{W})}$ , multiplied by the condition number,

$\|\widehat{R}_{\alpha,n}\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}$ . More careful investigation reveals that  $\zeta_n$  consists of stochastic errors from estimating  $h_0$  and a bias from estimating  $m_0$ -see Proposition 5.3 in Section 5. For the convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$ , it remains to calculate the asymptotic order of the regularization errors,  $\widehat{b}_\alpha = (\widehat{\Gamma}_\alpha - I)m_0$ , where  $\widehat{\Gamma}_\alpha = U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$ . Unlike the consistency result in Theorem 3.2, the convergence rate of  $\widehat{b}_\alpha$  cannot be fixed, for arbitrary  $m_0 \in L^2(\mathcal{X})$ . This is because  $\widehat{\Gamma}_\alpha$  does not converge ‘uniformly’ to  $I$ , on  $L^2(\mathcal{X})$ , for any choice of  $U_\alpha(\cdot)$ .<sup>9</sup> A meaningful question then will be whether the convergence rate of  $\widehat{b}_\alpha$  is available, still on a large subset of  $L^2(\mathcal{X})$ , by strengthening some of the conditions in C.3.1 appropriately.

**Condition 3.2** Given  $U_\alpha : (0, \bar{\lambda}] \rightarrow \mathbb{R}$ , it holds for any  $\mu \in (0, \bar{\mu}]$  that  $\sup_{\lambda \in (0, \bar{\lambda})} \lambda^\mu |U_\alpha(\lambda)\lambda - 1| \leq C\alpha^\mu$ , for any  $\alpha \in (0, \alpha_0)$ , where  $\alpha_0 > 0$ .

It is clear that C.3.1(ii) follows from C.3.2. The latter condition also implies C.3.1(i), by Principle of Uniform Boundedness; see Taylor and Lay (1980, p.190). In Lemma 3.3 of the appendix, we show that, for  $U_\alpha(\cdot)$  satisfying C.3.2,

$$\|(\widehat{\Gamma}_\alpha - I)(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^\mu\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \leq C\alpha^{\min(\mu, \bar{\mu})}, \text{ a.s.}, \quad (14)$$

implying that  $\widehat{b}_\alpha$  decays at the rate of  $\alpha^{\min(\mu, \bar{\mu})}$ , if  $m_0$  lies in the range space of  $(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^\mu$ , for all  $n$  sufficiently large. Suppose that  $\widehat{T}_n$  converges uniformly  $T$  in  $L^2(\mathcal{X})$ , then, it makes a sense that a similar argument will hold on the range space of  $(T^*T)^\mu$ . Below, we will use this observation to calculate the convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$ , by assuming additional information about the true solution such that

$$m_0 \in \mathcal{M}_\mu \equiv \mathcal{R}((T^*T)^\mu), \quad \text{for } \mu > 0. \quad (15)$$

**Remark 3.3** (i) Since  $T$  is an integral operator of smoothing effects, the sourcewise representation of  $m_0$  in (15) can be understood as an *abstract smoothness condition*. The alternative definition of smoothness is indeed one of the features that distinguish regularization theory from the standard nonparametric methods. To get some idea of the condition, suppose that bivariate r.v.  $(X, W)$ , supported by  $[0, 1] \times [0, 1]$ , have uniform distributions such that  $f_{X,W}(x, w) = 1$ , for  $0 \leq x \leq w \leq 1$ , and  $f_{X,W}(x, w) = 0$ , otherwise. For  $\mu = 1$ , (15) reduces to ‘ $m_0(x) = \int_x^1 \int_0^w m_\mu(u) du dw$ , for some

---

<sup>9</sup>Such property of  $\widehat{\Gamma}_\alpha$ , in fact, obtains only on a finite-dimensional subspace of  $L^2(\mathcal{X})$ . For this, we only remark that (i) the limit (in operator norm) of a sequence of compact operators is also compact; and (ii) the identity operator  $I : \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{M}_X$  is compact if and only if  $\dim(\mathcal{M}_X) < \infty$ ; see Kress (1989, p.18, Theorem 2.16 and 2.19).

$m_\mu \in L^2[0, 1]$ , implying that  $m_0$  has square-integrable (generalized) second-derivatives. In general, the abstract smoothness condition imposes stronger smoothness on  $m_0$ , as the kernel of the integral operator becomes smoother, or  $\mu$  increases.

(ii) By definition,  $\mathcal{M}_\mu \subset \mathcal{M}_{\mu'}$ , for  $\mu' \leq \mu$ . Also, from  $\overline{\mathcal{R}}((T^*T)^\mu) = \mathcal{N}^\perp((T^*T)^\mu)$  and  $\mathcal{N}((T^*T)^\mu) = \mathcal{N}(T)$ , it follows that  $\mathcal{M}_\mu$  is dense in  $L^2(\mathcal{X})$ , if  $T$  is one-to-one, i.e.,  $m_0$  is identifiable.

(ii) As indicated by (14), the decaying rate of the pure regularization bias can be quite slow for  $\mu$  close to zero, and cannot exceed  $\alpha^{\bar{\mu}}$  even for  $\mu > \bar{\mu}$ . The latter phenomenon, known as saturation of regularization, depends on the way that  $\widehat{R}_{\alpha,n}$  approximates the inverse operator,  $T^{-1}$ . We define the *qualification* of a regularization method to be  $\bar{\mu}(> 0)$ , if and only if C.3.2 holds only for  $\mu \in (0, \bar{\mu}]$ , but not for  $\mu > \bar{\mu}$ . ■

For  $m_0 \in \mathcal{M}_\mu$ , the regularization errors separate into two parts

$$\widehat{b}_\alpha = (\widehat{\Gamma}_\alpha - I)(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^\mu m_\mu - (\widehat{\Gamma}_\alpha - I)[(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^\mu - (T^*T)^\mu] m_\mu, \quad (16)$$

where  $m_\mu = (T^*T)^{-\mu} m_0 \in L^2(\mathcal{X})$ . For a benchmark case of  $m_0 \in \mathcal{R}(T^*)$  or  $\mathcal{R}(T^*T)$ , the convergence rate of  $\widehat{b}_\alpha$  follows easily from (14), since the second term is quite simple in this case. We remark that  $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{R}((T^*T)^{1/2})$ , since, by polar decomposition,  $T^* = (T^*T)^{1/2}U$ , where  $U$  is a unitary operator such that  $U^*U = I_{\mathcal{D}(T^*)}$ ; see Taylor and Lay (1980, p.379). Let  $C$  and  $C_i$  denote a generic constant that is a finite real number.

**Theorem 3.3** Let  $U_\alpha(\cdot)$  satisfy C.3.1 and C.3.2, with  $\bar{\mu} \geq 1$ . Then, (i) for  $m_0 \in \mathcal{R}((T^*T)^{1/2})$ , it holds that, for any  $n$ ,

$$\|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq \frac{C_1}{\sqrt{\alpha}} \|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} + C_2 \alpha^{1/2} \|h_1\|_{L^2(\mathcal{W})} + C_3 \|(\widehat{T}_n^* - T^*)h_1\|_{L^2(\mathcal{X})}, \text{ a.s.} \quad (17)$$

where  $h_1 = T^{*-1}(m_0)$ . And, (ii) for any  $m_0 \in \mathcal{M}_1 = \mathcal{R}(T^*T)$ , it holds that, for any  $n$ ,

$$\begin{aligned} \|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq & \frac{C_1}{\sqrt{\alpha}} \|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} + C_2 \alpha \|m_1\|_{L^2(\mathcal{X})} \\ & + C_3 \sqrt{\alpha} \|(\widehat{T}_n - T)m_1\|_{L^2(\mathcal{W})} + C_4 \|(\widehat{T}_n^* - T^*)h_1\|_{L^2(\mathcal{X})}, \text{ a.s.} \end{aligned} \quad (18)$$

where  $m_1 = (T^*T)^{-1}m_0$ , and  $h_1 = Tm_1$ .

Theorem 3.3 shows sufficiency of C.3.1 and 3.2 for derivation of the convergence rates for the general regularization method in (11)-at least, for specific orders of smoothness.<sup>10</sup> The first term in (17)

---

<sup>10</sup>We need to know the shape of  $U_\alpha(\cdot)$ , for the convergence rates in a more general case of  $\mu$ ; see the analyses in section 4.

or (18) is already explained. The remaining terms correspond to the asymptotic orders of the regularization errors ( $\widehat{b}_\alpha$ ). The second term represents the decaying rate of the (stochastic) pure regularization bias, which is given by (14). It decays to zero at a faster rate, as  $m_0$  is smoother. The last terms reflect how the estimation of the unknown operator affects the convergence rates. If  $m_0$  is further restricted to be in  $\mathcal{M}_{\mu,\rho} = (T^*T)^\mu(B_\rho)$ , Theorem 4.3 can be expressed more conveniently, by means of the uniform convergence rate of  $\widehat{T}_n$  and  $\widehat{T}_n^*$ , where  $B_\rho$  is the sphere (with radius  $\rho$ ) in  $L^2(\mathcal{X})$ .

**Corollary 3.4** Assume the conditions of Theorem 3.3. If  $\widehat{T}_n$  (and  $\widehat{T}_n^*$ ) converges uniformly to  $T$  on  $L^2(\mathcal{X})$  (and  $T^*$  on  $L^2(\mathcal{W})$ , respectively), then, (i) for  $m_0 \in \mathcal{M}_{1/2,\rho}$ ,

$$\|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq C \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} + \alpha^{1/2} + \|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} \right\}, \text{ a.s.}$$

and (ii) for  $m_0 \in \mathcal{M}_{1,\rho}$ ,

$$\begin{aligned} \|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq & C \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} + \alpha \right. \\ & \left. + \sqrt{\alpha} \|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} + \|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{T(\mathcal{M}_{0,\rho}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \right\}, \text{ a.s.} \end{aligned}$$

Once the estimators for  $\widehat{h}_{0,n}$  and  $\widehat{T}_n$  are fixed, the asymptotic order of each term appearing in Corollary 3.4 can be calculated from the standard results on nonparametric estimation. To be rigorous, the above results give only a lower bound on the convergence rates of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$ . In Theorem 4.4 of the next section, we show that a sharper bound in fact is available for a specific regularization method, through improvements upon the last term in (18). Related to this issue, an interesting question concerns the best-possible convergence rate attainable by approximate solutions to (6).

In mathematical inverse problems with  $T$  known, Tautenhahn (1998) showed that the best-possible convergence rate for  $m_0 \in \mathcal{M}_{\mu,\rho}$  is given by  $O(\bar{\delta}_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}})$ , where  $\bar{\delta}_n$  denotes the (deterministic) errors in estimating  $h_0$ ; i.e.,  $\bar{\delta}_n = \|\widehat{h}_{0,n} - h_0\|_{L^2(\mathcal{W})}$ . In the rest of the section, we extend the argument of Tautenhahn (1998) to a statistical inverse problem in (6). To this effect, we first need to set up a meaningful criterion for optimal bounds. Assuming that any reasonable estimation of  $m_0$  makes use of the relation in (6), proper optimal bounds may well depend on accuracies of the preliminary estimates,  $\widehat{h}_{0,n}$  or  $\widehat{T}_n$ , or both. As will be made clear shortly, our characterization of the best-possible convergence rate is closely related to the composite error bound,  $\|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})}$ . Let a large class of estimation methods,  $\mathfrak{R}$ , consist of a (possibly nonlinear) mapping  $R : L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})$  such

that  $R(0) = 0$ , and the resulting estimate for  $m_0$  is defined by  $R(\tilde{h})$ , where  $\tilde{h}$  is a given estimate of  $h_0$ . Given preliminary estimates,  $\hat{h}_{0,n}$  and  $\hat{T}_n$ , such that  $\|\hat{h}_{0,n} - \hat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} = O_p(\delta_n)$ , we define the worst-case convergence rate of  $R \in \mathfrak{R}$ , for  $m_0 \in \mathcal{M} \subset L^2(\mathcal{X})$ , by

$$\Xi(\{\delta_k\}, \mathcal{M}, R) = \sup_{m_0 \in \mathcal{M}, \|\hat{h}_{0,k} - \hat{T}_k m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} = O_p(\delta_k)} \mathbb{E}(\|R(\hat{h}_{0,n}) - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})}).$$

A rate-optimal method  $R^*$  in  $\mathfrak{R}$  is the one for which there exists  $N (\geq 1)$  such that

$$\Xi(\{\delta_k\}, \mathcal{M}, R^*) \leq C \inf_{R \in \mathfrak{R}} \Xi(\{\delta_k\}, \mathcal{M}, R),$$

for all  $n \geq N$ . In the appendix (the proof of Theorem 3.5), it is shown that the best-possible convergence rates of any estimation method (in minimax sense) is bounded by the modulus of stochastic equicontinuity of  $\hat{T}_n^\dagger$ . This generalizes the result by Ivanov et al (1978) for a deterministic case with  $T$  known. An explicit form of such bound can be calculated, especially when  $\mathcal{M}$  is given by  $\mathcal{M}_{\mu,\rho}$ . The following theorem, in this way, establishes the best-possible convergence rate for  $m \in \mathcal{M}_{\mu,\rho}$ , given some consistent estimates,  $\hat{h}_n$  and  $\hat{T}_n$ .

**Theorem 3.5** Assume that  $\hat{T}_n$  converges pointwise to  $T$  in  $L^2(\mathcal{X})$ , and that  $\{\delta_k^2/\rho^2\}_{k \geq N}^\infty \in \sigma((T^*T)^{1+2\mu})$ , for some  $N \geq 1$ , where  $\sigma(T^*T)$  denotes the spectrum of the self-adjoint operator  $T^*T$ . Then,

$$\inf_{R \in \mathfrak{R}} \Xi(\{\delta_k\}, \mathcal{M}_{\mu,\rho}, R) = O_p(\delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}). \quad (19)$$

According to Theorem 3.5, the optimal bound is determined jointly by the composite error bound ( $\delta_n$ ), and the order of smoothness ( $\mu$ ). A faster convergence rate is possible, as both  $T$  and  $h$  are estimated with more accuracies, and  $m_0$  becomes smoother (i.e.,  $\mu$  increases). The only difference of Theorem 3.5 from the result of Tautenhahn (1998) is the replacement of the error bound,  $\bar{\delta}_n = \|\hat{h}_{0,n} - h_0\|_{L^2(\mathcal{W})}$ , by  $\delta_n = \|\hat{h}_{0,n} - \hat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})}$ . The extension is somewhat natural, since  $T$  also has to be estimated in the statistical inverse problem. It should be pointed out that (19) cannot be used in the same way as the usual statistical bounds, since optimality in (19) is only relative to the accuracies of  $\hat{h}_{0,n}$  and  $\hat{T}_n$ . Without additional assumptions, it does not seem possible to tell which  $\delta_n$  is minimal, while Stone (1982)'s bounds directly applies to  $\bar{\delta}_n$ . In this sense, we will call (19) as the *quasi-optimal bounds*. An important application of the quasi-optimal bounds concerns derivation of the actual convergence rate of a regularization method. In the rest of the paper, we will use  $\delta_n$  to denote the convergence rate of the composite errors, given some preliminary estimates,  $\hat{h}_{0,n}$  and  $\hat{T}_n$ ;  $\|\hat{h}_{0,n} - \hat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} = O_p(\delta_n)$ .

**Remark 3.4** Let  $\widehat{m}_{\alpha,n}$  be a regularized estimator of  $m_0 \in \mathcal{R}(T^*)$ , defined by (12), where  $U_\alpha(\cdot)$  satisfies C.3.1 and C.3.2, with  $\bar{\mu} \geq 1$ . We suppose, as a side condition, that the given preliminary estimates,  $\widehat{h}_{0,n}$  and  $\widehat{T}_n$ , satisfy

$$\|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} \leq C \|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})}^{1/2}.$$

In section 5, we will show that no strong restrictions are imposed by the side condition. From Theorem 3.5 and Corollary 3.4(i), we obtain both lower and upper bounds on the convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$ :

$$O_p(\delta_n^{1/2}) \leq \|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq O_p(\delta_n/\sqrt{\alpha}) + O_p(\sqrt{\alpha}) + O_p(\delta_n^{1/2}).$$

If we choose a regularization parameter such that  $\alpha = \alpha_n^* = C\delta_n$ , the actual convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$  is given by  $\delta_n^{1/2}$ . In other words, the above lower bound, which is in fact sharp, attains quasi-optimality in (19), given the side condition and  $\alpha = \alpha_n^*$ . ■

**Remark 3.5** For derivation of the optimal bound, we do not assume special properties of the estimates for  $\widehat{h}_n$  or  $\widehat{T}_n$ , except that the sequence,  $\{\|\widehat{h}_n - \widehat{T}_n m\|_{L^2(\mathcal{W})}^2\}$ , lies in the spectrum of the operator,  $(T^*T)^{1+2\mu}$ . Such assumption does not seem so strong in general, since zero is always an accumulation point in the spectrum of  $T^*T$ , when  $T$  has a non-closed range. If there is additional information about the preliminary estimates, or the side condition of Theorem 3.5 is violated, one may possibly get a faster convergence rate. ■

## 4 Optimal Convergence Rates of Various Regularization Methods

While Theorem 3.3 sheds light on the asymptotic properties of the general regularization methods, it is not clear how those results extend to a more general case of  $\mu > 0$ . The main difficulties are involved with finding a sharp bound of the term,  $\|(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^\mu - (T^*T)^\mu\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}$ .<sup>11</sup> In this section,

<sup>11</sup>By Vainikko and Veretennikov (1986), an obvious bound is available;

$$\|(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^\mu - (T^*T)^\mu\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \leq C \max\{\|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})}^{\min(\mu,1)}, \|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})}^{\min(\mu,1)}\}, \text{ a.s.}$$

Unfortunately, the resulting bound ends up only with a quite slower convergence rate, when  $\mu$  is arbitrarily close to zero.

we use an alternative decomposition of  $\widehat{b}_\alpha$ , to derive the convergence rates for  $m_0 \in \mathcal{M}_\mu$  (with  $\mu > 0$ );

$$\widehat{b}_\alpha = b_{1\alpha} + \widehat{b}_{2\alpha} \equiv (\Gamma_\alpha - I)(T^*T)^\mu m_\mu + (\widehat{\Gamma}_\alpha - \Gamma_\alpha)(T^*T)^\mu m_\mu, \quad (20)$$

where  $\Gamma_\alpha = U_\alpha(T^*T)T^*T$ . The first term ( $b_{1\alpha}$ ) stands for a (deterministic) pure regularization bias, whose asymptotic behaviors have been analyzed in detail by mathematical regularization theory. Under C.3.2, the decaying rate of  $b_{1\alpha}$  is the same as (14), from Lemma 3.3. The remaining error term ( $\widehat{b}_{2\alpha}$ ), specific to statistical inverse problems, arises from use of estimated operators. Asymptotic properties of  $\widehat{b}_{2\alpha}$ , in general, depend on a particular shape of  $U_\alpha(\cdot)$  as well as given estimates of  $T$ . In mathematics literature, various regularization methods have been suggested, that satisfy the conditions in C.3.1 and C.3.2. We select some of popular methods that are different in qualification, and show how special features of  $U_\alpha(\cdot)$  affect the statistical properties of  $\widehat{R}_{\alpha,n}$ .

**Ordinary Tikhonov Method** With a choice of  $U_{1,\alpha}(\lambda) = (\alpha + \lambda)^{-1}$ , (12) leads to the ordinary Tikhonov regularization method (OTR) such that

$$\widehat{m}_{1,\alpha} = \widehat{R}_{1,\alpha} \widehat{h}_{0,n} = U_{1,\alpha}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* \widehat{h}_{0,n} = (\alpha I + \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{-1} \widehat{T}_n^* \widehat{h}_{0,n}, \quad (21)$$

By applying differential calculus in Hilbert space, one can show that  $\widehat{m}_{1,\alpha}$  is a unique minimizer of the Tikhonov functional, i.e.,

$$\widehat{m}_{1,\alpha} = \arg \min_{m(\cdot) \in L^2(\mathcal{X})} \|\widehat{T}_n^* m - \widehat{h}_{0,n}\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 + \alpha \|m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2, \quad (22)$$

see Tikhonov and Arsenin (1977). OTR cures for instability of the generalized inverse, via penalization of (7), comparing to constrained minimum-distance in the compactification method.<sup>12</sup> If the constraint in (10) is specified in  $L^2$ -norm rather than the Sobolev norm, both types of minimum-distance are in a dual relation. They will yield the same estimates, if the regularization parameter of OTR ( $\alpha$ ) is equal to the Lagrange multiplier implied by (10). It is straightforward to check that C.3.1 and C.3.2 are satisfied by  $U_{1,\alpha}(\cdot)$ . The latter condition holds for  $\mu \leq 1$ , but not for  $\mu > 1$ ; namely, the qualification of OTR is  $\bar{\mu}_{OTR} = 1$ . Consistency of OTR is obvious from Theorem 3.2. For a limited case of  $\mu$  (equal to 1/2 or 1), the convergence rate of OTR is also available by Theorem 3.3. The following theorem, coinciding with Theorem 3.3 in the limited case, shows how the latter theorem extends to a general value of  $\mu$  ( $> 0$ ), at least for OTR.

---

<sup>12</sup>In the classical papers on ill-posed problems, Tikhonov (1963) and Phillips (1962) used, as a penalty term, Sobolev norm of  $m$  and  $L^2$ -norm of its derivatives, instead of  $\|m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2$  in (22).

**Theorem 4.1** (i) For  $m_0 \in \mathcal{R}((T^*T)^\mu)$  with  $\mu > 0$ , it holds that

$$\begin{aligned} \|\widehat{m}_{1,\alpha} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} &\leq \frac{C_1}{\sqrt{\alpha}} \|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} + C_2 \alpha^{\min(\mu,1)} \|\overline{m}_\mu\|_{L^2(\mathcal{X})} \\ &\quad + C_3 \alpha^{\min(\mu-1/2,1/2)} \|(\widehat{T}_n - T) \overline{m}_{\alpha,\mu}\|_{L^2(\mathcal{W})} + C_4 \alpha^{\min(\mu-1/2,0)} \|(\widehat{T}_n^* - T^*) \overline{h}_{\alpha,\mu}\|_{L^2(\mathcal{X})}, \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

where  $\overline{m}_\mu = (T^*T)^{\max(\mu-1,0)} m_\mu$ ,  $\overline{m}_{\alpha,\mu} = \alpha^{\min(1-\mu,0)} (\alpha I + T^*T)^{-1} (T^*T)^\mu m_\mu \in \mathcal{M}_{\max(\mu-1,0)}$ , and  $\overline{h}_{\alpha,\mu} = \alpha^{\min(1/2-\mu,0)} T (\alpha I + T^*T)^{-1} (T^*T)^\mu m_\mu \in T^{*-1}(\mathcal{M}_{\max(\mu,1/2)})$ .

(ii) For  $m_0 \in \mathcal{M}_{\mu,\rho}$ , with  $\mu > 0$ , it holds that

$$\begin{aligned} \|\widehat{m}_{1,\alpha} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} &\leq C \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} + \alpha^{\min(\mu,1)} + \alpha^{\min(\mu-1/2,1/2)} \|\widehat{T}_n - T\|_{\mathcal{M}_{\max(\mu-1,0)} \rightarrow L^2(\mathcal{W})} \right. \\ &\quad \left. + \alpha^{\min(\mu-1/2,0)} \|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{T^{*-1}(\mathcal{M}_{\max(\mu,1/2)}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \right\}, \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (23)$$

Owing to the unit qualification ( $\overline{\mu}_{OTR} = 1$ ), the decaying rate of the regularization bias of OTR ( $b_{1\alpha}$ ), which is given in the second term of (23), cannot be faster than  $\alpha$ , regardless of smoothness of  $m_0$ . Similar saturation effects take place in the error term corresponding to  $\widehat{b}_{2\alpha}$ . Its relevant bounds, given in the last two terms of (23), cannot be improved beyond the benchmark case of  $\mu = 1$ . Applying an argument used in Remark 3.4, we can show that the lower bounds in Theorem 4.1 leads to the actual convergence rate of OTR, in some cases. Let  $\mu_q = \min\{\mu, q\}$  and  $\mu_q^\dagger = \max(\mu_q, 1/2)$ , where  $q$  is a positive integer.

**Remark 4.1** (*Suboptimality of OTR*) (a) Assume a side condition such that  $\max\{\|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})}, \|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}\} \leq O_p(\delta_n^{2\mu_1^\dagger/(2\mu_1+1)})$ . If we choose a regularization parameter,  $\alpha = \alpha_n^* = C \delta_n^{2/(2\mu_1+1)}$  so that  $\alpha^{-1/2} \|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} \simeq \alpha^{\mu_1}$ , then, the last two terms in (23) are of order, not greater than  $O_p(\alpha^{\mu_1})$ . Consequently, by Theorem 3.5 and Theorem 4.1, we have, for  $m_0 \in \mathcal{M}_\mu$  ( $\mu > 0$ ), that

$$O_p(\delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}) \leq \|\widehat{m}_{1,\alpha} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq O_p(\delta_n^{\frac{2\mu_1}{2\mu_1+1}}).$$

The given choice of  $\alpha = \alpha^*(n)$  ensures quasi-optimality of  $\widehat{m}_{1,\alpha}$ , for  $m_0 \in \mathcal{M}_\mu$  with  $\mu \leq 1$ , but not for  $\mu > 1$ . Due to early saturation, the optimal bounds  $\delta_n^{2\mu/(2\mu+1)}$ , with  $\mu > 1$ , are in facts not attainable by OTR with any choice of  $\alpha = \alpha(n)$ , for a similar reason in Groetsch (1983, Proposition 2.2).

(b) If we note that constrained minimum-distance in (10) is dual to OTR (with penalization by the Sobolev norm), suboptimality of the compactification method can be understood in a similar way. ■

**Iterated Tikhonov Regularization** A direct improvement upon OTR can be made by bias-reduction in  $\widehat{m}_{1,\alpha}$ . Noting that the regularization bias of OTR ( $\widehat{b}_\alpha$ ) can be estimated consistently by  $(\widehat{\Gamma}_\alpha - I)\widehat{m}_{1,\alpha}$ , a bias-corrected version of  $\widehat{m}_{1,\alpha}$  is given by  $\widehat{m}_{2,\alpha} = (I + \widehat{E}_\alpha)\widehat{m}_{1,\alpha}$ , where  $\widehat{E}_\alpha = I - \widehat{\Gamma}_\alpha = \alpha(\alpha I + \widehat{T}_n^*\widehat{T}_n)^{-1}$ . In form of (12), the estimator is written as  $\widehat{m}_{2,\alpha} = \widehat{R}_{2,\alpha}\widehat{h}_{0,n} = U_{2,\alpha}(\widehat{T}_n^*\widehat{T}_n)\widehat{T}_n^*\widehat{h}_{0,n}$ , where  $U_{2,\alpha}(\lambda) = [1 + \alpha(\alpha + \lambda)^{-1}](\alpha + \lambda)^{-1}$ . Rewriting  $U_{2,\alpha}(\lambda)$  as  $[(\lambda + \alpha)^2 - \alpha^2]/[\lambda(\lambda + \alpha)^2]$ , it is easy to check that C.3.1 as well as C.3.2 (with  $\bar{\mu} = 2$ ) hold. By means of the larger qualification of  $\widehat{R}_{2,\alpha}$ , the pure regularization bias of  $\widehat{m}_{2,\alpha}^\alpha$  decays at the rate of  $O(\alpha^{\min(\mu,2)})$ , leading to a faster convergence rate than that of OTR, for  $m_0 \in \mathcal{R}((T^*T)^\mu)$  with  $\mu > 1$ . For  $\mu > 2$ , further improvements are possible, by applying a similar argument repeatedly. Letting  $U_{q,\alpha}(\lambda) = [(\lambda + \alpha)^q - \alpha^q]/[\lambda(\lambda + \alpha)^q]$ , we define the iterated Tikhonov regularization of order  $q$  (hereafter, ITR( $q$ )) by

$$\widehat{m}_{q,\alpha} = \widehat{R}_{q,\alpha}\widehat{h}_{0,n} = U_{q,\alpha}(\widehat{T}_n^*\widehat{T}_n)\widehat{T}_n^*\widehat{h}_{0,n} = \sum_{j=1}^q \widehat{E}_\alpha^{j-1}(\alpha I + \widehat{T}_n^*\widehat{T}_n)^{-1}\widehat{T}_n^*\widehat{h}_{0,n},$$

where the last equality comes from  $U_{q,\alpha}(\lambda) = \sum_{j=1}^q (\frac{\alpha}{\alpha+\lambda})^{j-1} (\frac{1}{\alpha+\lambda})$ . Straightforward calculations show that both C.3.1 and C.3.2 are satisfied by  $U_{q,\alpha}(\cdot)$ , with the qualification of ITR( $q$ ) equal to  $q$ . In an alternative way,  $\widehat{m}_{q,\alpha}$  can be induced from an iterative procedure

$$(\alpha I + \widehat{T}_n^*\widehat{T}_n)\widehat{m}_{q,\alpha} = \widehat{T}_n^*\widehat{h}_{0,n} + \alpha\widehat{m}_{q-1,\alpha}, \quad \text{with } \widehat{m}_{0,\alpha} = 0. \quad (24)$$

The initial condition shows that OTR is equivalent to ITR(1). In (24), each step of iteration requires the same operator to be inverted, and thus the computational costs of ITR( $q$ ) is almost the same as that of OTR. For a variational characterization of  $\widehat{m}_{q,\alpha}$ , we remark that (24) is the normal equation of the penalized minimum-distance

$$\min_{m \in L^2(\mathcal{X})} \|\widehat{T}_n m - \widehat{h}_{0,n}\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 + \alpha \|m - \widehat{m}_{q-1,\alpha}\|_{L^2(\mathcal{X})}^2.$$

When  $T$  is known, the asymptotic properties of ITR are studied by King and Chillingworth (1979) and Engl (1987). The following theorem gives an extension to a statistical inverse problem.

**Theorem 4.2** For  $m_0 \in \mathcal{M}_{\mu,\rho}$ , with  $\mu > 0$ , it holds that

$$\begin{aligned} \|\widehat{m}_{q,\alpha} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} &\leq C \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} + \alpha^{\min(\mu,q)} + \alpha^{\min(\mu-1/2,1/2)} \|\widehat{T}_n - T\|_{\mathcal{M}_{\max(\mu-1,0)} \rightarrow L^2(\mathcal{W})} \right. \\ &\quad \left. + \alpha^{\min(\mu-1/2,0)} \|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{T^{*-1}(\mathcal{M}_{\max(\mu,1/2)}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \right\}, \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

where  $q$  is any (finite) positive integer.

The only difference of Theorem 4.2 from Theorem 4.1 lies in the faster convergence rate of the pure regularization bias (the second term in the above bound), improving upon OTR for  $\mu > 1$ .

**Remark 4.2** For  $m_0 \in \mathcal{M}_\mu$  with  $\mu \leq q$ , the quasi-optimality of  $\text{ITR}(q)$  is proved in the same way as Remark 4.1. Here, the relevant side condition to be assumed is  $\max\{\|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})}, \|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}\} \leq O_p(\delta_n^{2\mu^\dagger/(2\mu_q+1)})$ . Under a choice of  $\alpha = \alpha_n^* \simeq \delta_n^{2/(2\mu_q+1)}$ , the actual convergence rate of  $\text{ITR}(q)$  is quasi-optimal, i.e.,  $\|\widehat{m}_{q,\alpha} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} = O_p(\delta_n^{2\mu_q/(2\mu_q+1)})$ . ■

**Generalized Tikhonov Regularization** Another extension of OTR has been suggested, by Plato and Vainikko (1990) and Tautenhahn (1998), to overcome a disadvantage due to early saturation. As in ITR, their method generalizes OTR by choosing an alternative penalty term, but the motivation is rather different. Suppose that the true solution is known to be sufficiently smooth, say,  $m \in \mathcal{R}((T^*T)^\mu)$  with  $\mu \geq (q-1)/2$ , for positive integer  $q$ . Then, one may try to penalize variability of  $m$  through  $\|(T^*T)^{-(q-1)/2}m\|_{L^2(\mathcal{X})}$ , instead of the standard  $L^2$ -norm of  $m$ . From  $T$  being an integral operator,  $(T^*T)^{-(q-1)/2}$  behaves like a differential operator, implying that  $\|(T^*T)^{-(q-1)/2}m\|_{L^2(\mathcal{X})}$  serves as  $L^2$ -norm of a generalized derivative of  $m$ . The differential norm will be useful, especially for control over highly-oscillating behaviors of a function, just like the Sobolev norm. Those considerations give rise to the generalized Tikhonov regularization method of order  $q$  (hereafter,  $\text{GTR}(q)$ ), defined as

$$\widehat{m}_{q,\alpha}^g = \min_{m \in L^2(\mathcal{X})} \|\widehat{T}_n m - \widehat{h}_{0,n}\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 + \alpha^q \|(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{-(q-1)/2} m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2, \quad \text{for } q \geq 1.$$

Applying differential calculus, we can show that  $\widehat{m}_{q,\alpha}^g$  is the solution to the normal equation,  $\widehat{T}_n^* (\widehat{T}_n \widehat{m}_{q,\alpha}^g - \widehat{h}_{0,n}) + \alpha^q (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{-(q-1)} \widehat{m}_{q,\alpha}^g = 0$ . Hence, using  $U_{q,\alpha}^g(\lambda) = (\alpha^q + \lambda^q)^{-1} \lambda^{(q-1)}$ , we can represent  $\text{GTR}(q)$  in form of (12)

$$\widehat{m}_{q,\alpha}^g = \widehat{R}_{q,\alpha}^g \widehat{h}_{0,n} = U_{q,\alpha}^g (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* \widehat{h}_{0,n} = [\alpha^q I + (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^q]^{-1} (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{(q-1)} \widehat{T}_n^* \widehat{h}_{0,n}.$$

Obviously,  $\text{GTR}(1)$  reduces to OTR. All the conditions in C.3.1 and C.3.2 are satisfied by  $U_{q,\alpha}(\cdot)$ , with the qualification of  $\text{GTR}(q)$  equal to  $q$ . The theorem below shows that the convergence rate of  $\text{GTR}(q)$  is the same as that of  $\text{ITR}(q)$ . Following Remark 4.2, we also can establish the quasi-optimality of  $\text{GTR}(q)$ , for  $m_0 \in \mathcal{M}_{\mu,\rho}$  with  $\mu \leq q$ .

**Theorem 4.3** For  $m_0 \in \mathcal{M}_{\mu,\rho}$ , (with  $\mu > 0$ ), the same bounds as in Theorem 4.2, apply to  $\widehat{m}_{q,\alpha}^g$ .

**Showalter's Regularization** The analyses so far have been confined to regularization methods of finite qualification. To give an example of infinite-qualification regularization, we consider Showalter's integral formula for the generalized inverse of  $\widehat{T}_n$

$$\widehat{T}_n^\dagger = \int_0^\infty \exp(-s\widehat{T}_n^*\widehat{T}_n)\widehat{T}_n^* ds.$$

Showalter (1967) showed that the above equality holds precisely on the domain of  $\widehat{T}_n^\dagger$ , which, by the argument above Remark 3.1, is equal to  $L^2(\mathcal{W})$ , for any finite  $n$ . A bounded approximation of  $\widehat{T}_n^\dagger$  is obtained by replacing the infinite interval of integral by a finite one, say,  $[0, 1/\alpha]$ . Using

$$U_\alpha^s(\lambda) = \int_0^{1/\alpha} \exp(-s\lambda) ds = \begin{cases} \lambda^{-1}[1 - \exp(-\frac{\lambda}{\alpha})], & \text{for } \lambda > 0, \\ \alpha^{-1} & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (25)$$

we define Showalter's regularization (SW) by

$$\widehat{m}_{\alpha,n}^s = \widehat{R}_\alpha^s \widehat{h}_{0,n} = U_\alpha^s(\widehat{T}_n^*\widehat{T}_n)\widehat{T}_n^*\widehat{h}_{0,n} = [\int_0^{1/\alpha} \exp(-s\widehat{T}_n^*\widehat{T}_n) ds] \widehat{T}_n^*\widehat{h}_{0,n}.$$

From  $\sup_{x>0} x^{-1}[1 - \exp(-x)] \leq 1$ , C.3.1(i) holds for  $U_\alpha^s(\cdot)$ . The rest of conditions of C.3.1 and C.3.2 follow from  $\sup_{x \geq 0} \exp(-x)x^\mu \leq e^{-\mu}\mu^\mu$ , and  $\lambda^\mu |U_\alpha^s(\lambda)\lambda - 1| = \alpha^\mu \exp(-\frac{\lambda}{\alpha}) (\frac{\lambda}{\alpha})^\mu$ , for any  $\mu > 0$ . The latter condition implies that the qualification of SW is infinite. For mathematical inverse problems with  $T$  known, the convergence rate of Showalter's regularization was studied by Schock (1985) and Engl and Gfrerer (1988). Below we extend those results to a stochastic case.

**Theorem 4.4** For  $m_0 \in \mathcal{M}_{\mu,\rho}$ , with  $\mu > 0$ , it holds that,

$$\begin{aligned} \|\widehat{m}_{\alpha,n}^s - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} &\leq C \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} + \alpha^\mu \right. \\ &\quad \left. + \alpha^{\mu-1/2} \|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} + \alpha^{\mu-1/2} \|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \right\}, \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (26)$$

By means of the infinite qualification, Showalter's method does not suffer from any saturation effects, accounting for simplicity of the convergence rate in (26), which is free of other nature of the regularization scheme. The second term in (26) indicates that smoothness of  $m_0$  is sufficient to determine the decaying rate of the pure regularization bias. The last two terms reflect additional gains of SW, by sharpening the corresponding bounds in the previous theorems. For example, when  $\mu > 1/2$ , the

last term in (26) is of smaller order than those in Theorem 3.3(b) and Theorem 4.1 through 4.3, since, in that case, the former decays at the rate of  $o_{a.s.}(\|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})})$ .

**Remark 4.3** Advantages of SW over other methods are highlighted in attaining the optimal bounds in (19), for an arbitrary order of smoothness in  $m_0$ . Under a simple side condition such that  $\max\{\|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})}, \|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}\} \leq O_p(\delta_n^{1/(2\mu+1)})$ , it follows from Theorem 3.5 and 4.4 that

$$O_p(\delta_n^{2\mu/(2\mu+1)}) \leq \|\widehat{m}_{\alpha,n}^s - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq O_p(\delta_n/\sqrt{\alpha}) + O_p(\alpha^\mu) + O_p(\alpha^{\mu-1/2}\delta_n^{1/(2\mu+1)}).$$

For  $\alpha = \alpha_n^* \simeq \delta_n^{\frac{2}{2\mu+1}}$ , the actual convergence rate of SW is given by  $\|\widehat{m}_{\alpha,n}^s - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} = O_p(\delta_n^{2\mu/(2\mu+1)})$ , which ensures quasi-optimality of  $\widehat{m}_{\alpha,n}^s$ , for any  $\mu > 0$ . Note that the necessary side condition is weaker than the previous ones. ■

## 5 Nonparametric Kernel IV Estimates

Various types of regularized estimates are conceivable, according to different nonparametric procedures for estimating  $h_0$  and  $T$ . As a preminent example, this section applies a kernel smoothing method to obtain the preliminary estimates. A general class of regularized kernel estimators for  $m_0$  then follow from (12). Those estimators include, as a special case, the kernel estimator (regularized by OTR) in Darolles, Florens, and Renault (2001), although the latter depends on a slightly different definition for  $h_0$  and  $T$ . Their estimator, lacking an exact closed form, can be computed only approximately, via an additional discretization method, such as the collocation method in Remark 3.1. A lower bound on the convergence rate was shown for the estimator, under a simplifying condition on the bandwidth parameters. Such a lower bound, however, turns out to be too rough to evaluate the actual convergence rate, not allowing for an optimal choice of bandwidth and regularization parameters. Moreover, early saturation of OTR prevents their estimator attaining the optimality bounds in (19), for relatively smooth functions. In this section, we develop more advanced results for kernel IV estimation. Using spectral theory for compact self-adjoint operators, we figure out the closed form of the kernel estimator which is defined by the general regularization method in (12). Consistency as well as the ‘actual’ convergence rates of those estimators are shown by applying the statistical results in section 3 or 4. Quasi-optimal bounds play a crucial role in our developments for the optimal choice of smoothing parameters.

## 5.1 Closed Form of Kernel IV Estimates

We start with a case where there is no common element between  $X$  and  $W$ . Assume that the underlying structural function is identified by  $m_0 = T^{-1}h_0$ , where  $h_0(w) = \int_{\mathcal{Y}} y f_{Y,W}(y, w) dy$ , and  $T : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  is given by  $(Tm)(w) = \int_{\mathcal{X}} m(x) f_{X,W}(x, w) dx$ . Let  $\widehat{f}_{Y,W,n}(\cdot, \cdot)$  and  $\widehat{f}_{X,W,n}(\cdot, \cdot)$  be a typical kernel estimator for  $f_{Y,W}(\cdot, \cdot)$  and  $f_{X,W}(\cdot, \cdot)$ , respectively, from the observations  $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^n$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_{Y,W,n}(y, w) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{g_0}(y_i - y) K_{g_2}(W_i - w), \\ \widehat{f}_{X,W,n}(x, w) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{g_1}(X_i - x) K_{g_2}(W_i - w),\end{aligned}$$

where  $K_g(s) = \Pi_{r=1}^d \frac{1}{g} K(s/g)$ , with  $K(\cdot)$  being a symmetric function defined on the real line, and  $d = \dim(s)$ . The preliminary estimates for  $h_0$  and  $T : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  are defined by

$$\widehat{h}_{0,n}(w) = \int_{\mathcal{Y}} y \widehat{f}_{Y,W,n}(y, w) dy = n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{g_2}(W_i - w) Y_i, \quad (27)$$

and  $\widehat{T}_n : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  such that

$$(\widehat{T}_n m)(w) = \int \widehat{f}_{X,W,n}(x, w) m(x) dx = \int \left[ n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{g_1}(X_i - x) K_{g_2}(W_i - w) \right] m(x) dx. \quad (28)$$

Also, define  $\widehat{T}_n^* : L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})$ , by

$$(\widehat{T}_n^* h)(x) = \int \widehat{f}_{X,W,n}(x, w) h(w) dw = \int \left[ n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{g_1}(X_i - x) K_{g_2}(W_i - w) \right] h(w) dw.$$

By Fubini's Theorem,  $\langle \widehat{T}_n m, h \rangle_{L^2(\mathcal{W})} = \langle m, \widehat{T}_n^* h \rangle_{L^2(\mathcal{X})}$ , a.s.; two random operators,  $\widehat{T}_n$  and  $\widehat{T}_n^*$ , are adjoint to each other. The integral operator  $\widehat{T}_n$  has a degenerate kernel, i.e.,  $\widehat{f}_{X,W,n}(\cdot, \cdot)$  is a finite sum of products of kernel weights on each observation  $(X_i, W_i)$ . Thus,  $\widehat{T}_n$  has a finite rank, with  $\dim(\mathcal{R}(\widehat{T}_n)) \leq n$ , from which follow boundedness as well as compactness, of  $\widehat{T}_n$  and the self-adjoint operator  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})$ .<sup>13</sup> Applying spectral theory for compact self-adjoint operators, a regularized kernel estimator of  $m_0$  is now well defined by (12), with  $\widehat{T}_n$  and  $\widehat{h}_{0,n}$  given as above, as long as  $U_\alpha(\cdot)$  is defined on a bounded interval,  $(0, \bar{\lambda}]$ , where  $\bar{\lambda} = \sup_{n \geq n_0} \|\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}$ .

<sup>13</sup>Namely,  $\|\widehat{T}_n\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} \stackrel{a.s.}{\leq} B_n$ , for some  $B_n < \infty$ , and for  $\mathcal{M}_\rho = \{m \in L^2(\mathcal{X}) : \|m\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq \rho\}$ ,  $\widehat{T}_n(\mathcal{M}_\rho)$  is compact in  $L^2(\mathcal{W})$ , a.s.

To show the closed form of the kernel IV estimator, we need the following definitions. Letting  $K_n^X(x) = [K_{g_1}(X_1 - x), \dots, K_{g_1}(X_n - x)]'$ , and  $K_n^W(w) = [K_{g_2}(W_1 - w), \dots, K_{g_2}(W_n - w)]'$ , we define

$$M_X = \int_{\mathcal{X}} K_n^X(x) K_n^X(x)' dx, \text{ and } M_W = \int_{\mathcal{W}} K_n^W(w) K_n^W(w)' dw.$$

Using integration-by-substitution, the  $(i, j)$ -th element of  $M_W$ , for example, is written more compactly, via a convolution-kernel function, as

$$M_{ij}^W = \int_{\mathcal{W}} K_{g_2}(W_i - w) K_{g_2}(W_j - w) dw = K_{g_2}^c(W_i - W_j),$$

where  $K_{g_2}^c(w) = (1/g_2) \int_{\mathcal{W}} K(w/g_2 - s) K(s) ds$ . A straightforward calculation shows that  $M_W$  is a  $(n \times n)$  symmetric nonnegative semi-definite matrix, for which the square-root matrix  $M_W^{1/2}$  is well-defined, satisfying  $M_W = M_W^{1/2} M_W^{1/2}$ .<sup>14</sup> Letting  $Q_{X,W} = n^{-2} M_W^{1/2} M_X M_W^{1/2}$ ,  $Q_{X,W}$  is also a  $(n \times n)$  symmetric nonnegative semi-definite matrix, whose eigenvalues are all real and positive. We denote, by  $\lambda_{\max}(Q_{X,W})$ , the maximum of those eigenvalues.

**Theorem 5.1** Let  $\hat{h}_{0,n}$  and  $\hat{T}_n$  be defined by (27) and (28), respectively, and  $\hat{T}_n^*$  be the adjoint of  $\hat{T}_n$ . Assume that  $U_\alpha(\cdot)$  is any real-valued function defined on a bounded interval,  $(0, \bar{\lambda}]$  where  $\bar{\lambda} \geq \sup_{n \geq n_0} \lambda_{\max}(Q_{X,W})$ . Then, for any  $n \geq n_0$ ,

$$\hat{m}_{\alpha,n}(x) = [U_\alpha(\hat{T}_n^* \hat{T}_n)(\hat{T}_n^* \hat{h}_{0,n})](x) = n^{-2} K_n^X(x)' M_W^{1/2} U_\alpha(Q_{X,W}) M_W^{1/2} \mathbf{y}, \quad (29)$$

where  $\mathbf{y} = (Y_1, \dots, Y_n)'$ .

By Theorem 5.1, the abstract operator-form of the kernel IV estimator translates into a concrete matrix-form. With  $U_\alpha(Q_{X,W})$  calculated by the standard eigenvalues decomposition, computations of  $\hat{m}_{\alpha,n}$  only involve simple operation of finite-dimensional matrices, when the convolution-kernel weights in  $M_X$  and  $M_W$  are given. For example, the kernel IV estimates, regularized by Showalter's method, are computed by

$$\hat{m}_{\alpha,n}^s = \left[ \int_0^{1/\alpha} \exp(-s \hat{T}_n^* \hat{T}_n) ds \right] \hat{T}_n^* \hat{h}_{0,n} = n^{-2} K_n^X(x)' M_W^{1/2} U_\alpha^s(Q_{X,W}) M_W^{1/2} \mathbf{y},$$

with  $U_\alpha^s(Q_{X,W}) = F_n U_\alpha^s(\Lambda_n) F_n'$ , where  $\Lambda_n$  is a diagonal matrix consisting of eigenvalues of  $Q_{X,W}$ , and  $F_n$  is a matrix of corresponding eigenvectors.<sup>15</sup>

<sup>14</sup> $a' M_W W a = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i M_{ij}^W a_j = \int_{\mathcal{W}} [\sum_{i=1}^n a_i K_h(W_i - w)]^2 dw \geq 0$ , for any  $a (\neq 0) \in \mathbb{R}^n$ . For positive-definiteness of  $M_W$ , it suffices to assume that  $\{K_h(W_i - \cdot)\}_{i=1}^n$  is linearly independent.

<sup>15</sup>Letting  $\lambda_{i,n}$  be the  $i$ -th eigenvalue of  $Q_{X,W}$ ,  $[U_\alpha^s(\Lambda_n)]_{(i,i)}$  is equal to  $\lambda_{i,n}^{-1} [1 - \exp(-\lambda_{i,n}/\alpha)]$ , for  $\lambda_{i,n} > 0$ , and equal to  $\alpha^{-1}$ , otherwise; see (25) in section 4.

**Remark 5.1.** (i) Suppose that  $K(\cdot)$  is a density function from a stable distribution, say, a gaussian kernel. Then, a further simplification of the convolution-kernel weight is available;

$$M_{ij}^W = K_{g_2}^c(W_i - W_j) = K_{\sqrt{2}g_2}(W_i - W_j),$$

from  $K^c(s) = K(s/\sqrt{2})/\sqrt{2}$ , since, by the stability assumption, the shape of a convoluted density function is not changed, except that the variance doubles. In that case, all the matrices in (29) are calculated in a straightforward way. In general, when there is no explicit form for the convolution kernel, we can compute  $K^c(\cdot)$  by numerical integration.

(ii) By Theorem 5.1, the naive minimum-distance estimator in section 3.1 has a closed form

$$\widehat{m}_n^\dagger(x) = K_n^X(x)' M_W^{1/2} (M_W^{1/2} M_X M_W^{1/2})^\dagger M_W^{1/2} \mathbf{y}.$$

If both  $K_n^X(\cdot)$  and  $K_n^W(\cdot)$  are assumed to be linearly independent, then,  $M_W$  and  $M_X$  are positive definite, from which we get  $\widehat{m}_n^\dagger(x) = K_n^X(x)' M_X^{-1} \mathbf{y}$ . From

$$\begin{aligned} (\widehat{T}_n \widehat{m}_n^\dagger)(w) &= \int \widehat{f}_{X,W,n}(x, w) \widehat{m}_n^\dagger(x) dx = n^{-1} K_n^W(w)' \langle K_n^X(\cdot), K_n^{X'}(\cdot) \rangle_{L^2(\mathcal{X})} M_X^{-1} \mathbf{y} \\ &= n^{-1} K_n^W(w)' \mathbf{y} = \widehat{h}_{0,n}(w), \end{aligned}$$

$\widehat{m}_n^\dagger(\cdot)$  is confirmed to be one of the exact solutions to the integral equation,  $\widehat{T}_n m = \widehat{h}_{0,n}$ , where  $\widehat{T}_n$  is in general not invertible. By definition of the generalized inverse,  $\widehat{m}_n^\dagger(\cdot)$  will be the solution of minimum-norm. Instability of  $\widehat{m}_n^\dagger$  is obvious from the minimum eigenvalue of  $M_X$  converging to zero, as  $n \rightarrow \infty$ , since a pair of elements in  $K_n^X(\cdot)$  should become arbitrarily close to each other.

(iii) In Darolles, Florens, and Renault (2001), an alternative kernel estimator of  $m_0$  is defined, based on OTR, by  $\widetilde{m}_{\alpha,n} = [\alpha I + \widetilde{T}_n^* \widetilde{T}_n]^{-1} \widetilde{T}_n^* \widetilde{h}_n$ , where  $(\widetilde{T}_n m)(w) = \int \widehat{f}_{X|W,n}(x|w) m(x) dx$ , and  $\widetilde{h}_n(w) = \int \widehat{f}_{Y|W,n}(y|w) dy$ . Unlike  $\widehat{m}_{\alpha,n}$  in (29), their estimator does not possess an exact closed form.

(iv) Let  $\widehat{f}_{X,W,n}^c(x, w) = n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{g_1}(X_i - x) K_{g_2}(W_i - w)$ , where  $K^c(\cdot)$  be a convolution kernel function in the above. Denote, by  $\widehat{f}_{X,W,n}^c(x, \mathbf{W})$ , the column vector of the joint density estimates,  $[\widehat{f}_{X,W,n}^c(x, W_1), \dots, \widehat{f}_{X,W,n}^c(x, W_n)]'$ . In a matrix form,  $\widehat{f}_{X,W,n}^c(x, \mathbf{W}) = n^{-1} K_n^{X'}(x) M_W$ . From  $\widehat{T}_n^* \widehat{h}_n = n^{-2} K_n^{X'}(\cdot) M_W \mathbf{y} = n^{-1} \widehat{f}_{X,W,n}^c(\cdot, \mathbf{W}) \mathbf{y}$ , we rewrite  $\widehat{m}_{\alpha,n}(\cdot)$  in (29) as

$$[R_n^\alpha(\widehat{h}_{0,n})](x) = [U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)(n^{-1} \widehat{f}_{X,W,n}^c(\cdot, \mathbf{W}) \mathbf{y})](x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \left[ U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{f}_{X,W,n}^c(\cdot, W_i) \right] (x) y_i.$$

This shows that  $\widehat{m}_{\alpha,n}(\cdot)$  includes, as a special case with  $U_\alpha(\lambda) = (\alpha + \lambda)^{-1}$ , the kernel estimator suggested by Hall and Horowitz (2003). ■

We turn to an extension to a common-element case, where  $X = (Z, W_1)$  and  $W = (W_1, W_2)$ . Let  $m_0$  be identified by  $T^{-1}h_0$ , where  $h_0(w) = \int_{\mathcal{Y}} y f_{Y,W}(y, w) dy$ , and  $T : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  is given by  $(Tm)(w) = \int_{\mathcal{Z}} m(z, w_1) f_{Z,W}(z, w) dz$ . We will use the same estimate of  $h_0$  as (27). Using

$$\widehat{f}_{Z, W_1, W_2}(z, w_1, w_2) = n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{g_1}(Z_i - x) K_{g_2}(W_{1i} - w_1) K_{g_2}(W_{2i} - w_2),$$

the preliminary estimates of  $T$  and its adjoint are defined, in a similar way to (28), by

$$\begin{aligned} (\widehat{T}_n m)(w_1, w_2) &= \int_{\mathcal{Z}} m(z, w_1) \widehat{f}_{Z, W_1, W_2}(z, w_1, w_2) dz, \text{ and} \\ (\widehat{T}_n^* h)(z, w_1) &= \int_{\mathcal{W}_2} h(w_1, w_2) \widehat{f}_{Z, W_1, W_2}(z, w_1, w_2) dw_2, \end{aligned} \quad (30)$$

respectively. A regularized kernel estimator of  $m_0$ , in the presence of common elements between  $X$  and  $W$ , is defined by (12), with  $\widehat{T}_n$  and  $\widehat{T}_n^*$  are modified as above. Letting  $K_n^X(z, w_1) = [K_{g_1}(Z_1 - z) K_{g_2}(W_{11} - w_1), \dots, K_{g_1}(Z_n - z) K_{g_2}(W_{1n} - w_1)]'$ , and  $K_n^{W_2}(w_2) = [K_{g_2}(W_{21} - w_2), \dots, K_{g_2}(W_{2n} - w_2)]'$ , we define

$$M_{(Z, W_1)}(w_1) = \int_{\mathcal{Z}} K_n^X(z, w_1) K_n^X(z, w_1)' dz, \quad M_{W_2} = \int_{\mathcal{W}_2} K_n^{W_2}(w_2) K_n^{W_2}(w_2)' dw_2,$$

and

$$Q_{Z, W}(w_1) = n^{-2} M_{W_2}^{1/2} M_{(Z, W_1)}(w_1) M_{W_2}^{1/2},$$

where  $M_{W_2}^{1/2}$  is the square-root of  $M_{W_2}$ . With  $A \odot B$  denoting the matrix Hadamard product (i.e., element-by-element multiplication),  $M_{(Z, W_1)}(w_1)$  is equivalent to  $[M_Z \odot \mathcal{K}_{W_1}(w_1)]$ , where the  $(i, j)$ -th element of  $M_Z$  and  $\mathcal{K}_{W_1}(w_1)$  is given by  $M_{ij}^Z = K_{g_1}^c(Z_i - Z_j)$  and  $\mathcal{K}_{ij}^{W_1}(w_1) = K_{g_2}(W_{1i} - W_{1j})$ , respectively. Note that  $Q_{Z, W}(w_1)$ , a function of  $w_1$ , is symmetric and nonnegative semi-definite, for any  $w_1 \in \mathcal{W}_1$ .

**Theorem 5.2** Let  $\widehat{h}_{0,n}$  and  $\widehat{T}_n$  be defined by (27) and (30), respectively, and  $\widehat{T}_n^*$  be the adjoint of  $\widehat{T}_n$ . Assume that  $U_\alpha(\cdot)$  is any real-valued function defined on a bounded interval,  $(0, \bar{\lambda}]$  where  $\bar{\lambda} \geq \sup_{w_1 \in \mathcal{W}_1} \sup_{n \geq n_0} \lambda_{\max}(Q_{Z, W}(w_1))$ . Then, for any  $n \geq n_0$ ,

$$\widehat{m}_{\alpha, n}(z, w_1) = [U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)(\widehat{T}_n^* \widehat{h}_{0,n})](z, w_1) = n^{-2} K_n^X(z, w_1)' M_{W_2}^{1/2} U_\alpha(Q_{Z, W}(w_1)) M_{W_2}^{1/2} [K_n^{W_1}(w_1) \odot \mathbf{y}]. \quad (31)$$

Using the matrix Hadamard product, we may rewrite  $\widehat{m}_{\alpha, n}(z, w_1)$  in Theorem 5.2 as

$$n^{-2} [K_n^Z(z) \odot K_n^{W_1}(w_1)]' M_{W_2}^{1/2} U_\alpha(n^{-2} M_{W_2}^{1/2} [M_Z \odot \{K_n^{W_1}(w_1) K_n^{W_1}(w_1)'\}] M_{W_2}^{1/2}) M_{W_2}^{1/2} [K_n^{W_1}(w_1) \odot \mathbf{y}],$$

which shows how the kernel IV estimator in (29) is generalized by the presence of  $W_1$ , the common elements between  $X$  and  $W$ . No additional difficulties arise in computing  $\widehat{m}_{\alpha,n}(z, w_1)$ , compared to  $\widehat{m}_{\alpha,n}(x)$  in Theorem 5.1.

## 5.2 Optimal Convergence Rates

We continue to analyze asymptotic properties of the kernel estimators in the previous section. Considering that (29) is a special case of (31), our asymptotic derivations will focus on a common-element case, as specified by the first condition below.

**C.5.1** (a) The random vector  $(Y_i, Z_i, W_i)$  is independent and identically distributed, satisfying (1)-(3), with  $m_0$  identified by  $T^{-1}h_0$ , where  $h_0(w) = \int_{\mathcal{Y}} y f_{Y,W}(y, w) dy$ , and the injective operator  $T : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  is such that  $(Tm)(w) = \int_{\mathcal{Z}} m(z, w_1) f_{Z,W}(z, w) dz$ . We assume that  $d_2 \geq d_1$ . (b)  $E(Y^2|W = w)$  is bounded uniformly in  $w$ , a.s.

**C.5.2** Let  $K(\cdot) \in \mathbb{K}_{p^*}$ , where  $\mathbb{K}_{p^*}$  is the class of all Borel measurable symmetric real-valued functions  $K(s)$  such that (a)

$$\int |K(s)| ds < \infty, \quad \int K(s) ds = 1, \quad \int K^2(s) ds < \infty, \quad \sup |K(s)| < \infty,$$

and (b)  $\int s^j K(s) ds = 0$ , for  $j = 1, \dots, p^* - 1$ , and  $\mu_{p^*}(K) = \int s^{p^*} K(s) ds < \infty$ , where  $p^*$  is an even integer.

**C.5.3** The joint density functions  $f_{Z,W}(\cdot, \cdot)$  is square-integrable and bounded;

$$\int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{Z}} f_{Z,W}^2(z, w) dz dw < \infty, \quad \text{and} \quad \sup_{(z,w) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{W}} f_{Z,W}(z, w) \leq C < \infty.$$

**C.5.4**  $f_{Z,W}(\cdot, \cdot)$  and  $m_0(\cdot)$  have continuous  $p_0$ -th and  $p_1$ -th partial derivatives, respectively, that are square-integrable, where  $p_0 \geq d_1/2$ .

**C.5.5** (a) The bandwidth parameters  $(g_1, g_2)$  satisfy that  $\max(g_1, g_2) \rightarrow 0$ ,  $ng_2^{d_2} \rightarrow \infty$ . (a) The regularization parameter  $\alpha$  satisfies that  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $ng_2^{d_2} \alpha \rightarrow \infty$ , and  $g_1^{p_0} / \sqrt{\alpha} \rightarrow 0$ , as  $n \rightarrow \infty$ .

All the technical conditions in C.5.2 through C.5.4 are standard in nonparametric kernel estimation. The joint density function is not required to have a compact support, nor restricted to be bounded away from zero. The square-integrability condition in C.5.3 entails boundedness of the linear operator  $T$ . C.5.5(b), which is rather stronger than C.5.5(a), is necessary for consistency of the regularized

kernel estimates. Let  $\widehat{h}_{0,n}$  and  $\widehat{T}_n$  be given by (27) and (30), respectively. Our first result concerns sufficiency of the above conditions for derivation of the basic properties of the preliminary estimates, including consistency and the convergence rates.

**Proposition 5.3** Suppose that C.5.1 through C.5.3, and C.5.5(a) hold. Then,

(i)  $\widehat{T}_n$  is uniformly consistent for  $T$ , i.e.,  $\|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} \xrightarrow{p} 0$ , as  $n \rightarrow \infty$ .

Assume additionally that C.5.4 holds and  $K(\cdot) \in \mathbb{K}_{p^*}$ , with  $p^* \geq \bar{p} = \max(p_0, p_1)$ . Then,

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} &= O_p(1/\sqrt{ng_2^{d_2} + g_1^{p_0} + g_2^{p_0}}), \\ \|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} &= O_p(1/\sqrt{ng_1^{d_1} + g_1^{p_0} + g_2^{p_0}}), \quad \text{and} \\ \text{(iii)} \quad \|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} &= O_p(1/\sqrt{ng_2^{d_2} + g_1^{\bar{p}}}). \end{aligned}$$

Let  $\widehat{m}_{\alpha,n}$  be the kernel estimates defined by (31). When  $U_\alpha(\cdot)$  satisfies C.3.1 and 3.2, the asymptotic properties of the general kernel estimates can be shown from Proposition 5.3, applied to Theorem 3.2 and Theorem 3.3 (or Corollary 3.4).

**Theorem 5.4** Assume that C.5.1 through C.5.5 hold, with  $p_0 = p_1$ , and  $U_\alpha(\cdot)$  satisfies C.3.1. Then,

(i)  $\|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \xrightarrow{p} 0$ , as  $n \rightarrow \infty$ , for all  $m_0 \in L^2(\mathcal{X})$ .

Assume additionally that  $U_\alpha(\cdot)$  satisfies C.3.2, with  $\bar{\mu} \geq 1$ . Then,

$$\text{(ii)} \quad \|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq O_p\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\frac{1}{\sqrt{ng_2^{d_2}}} + g_1^{p_0}\right]\right) + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{ng_1^{d_1}}} + g_2^{p_0}\right) + \begin{cases} O_p(\sqrt{\alpha}), & \text{for } m_0 \in \mathcal{M}_{1/2,\rho}, \\ O_p(\alpha), & \text{for } m_0 \in \mathcal{M}_{1,\rho}, \end{cases}$$

Using the argument in Remark 3.4, we can show that, under additional conditions on  $(g_1, g_2, \alpha)$ , the lower bounds in Theorem 5.4 gives rise to the actual convergence rates of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$ . Throughout this section, a vector of smoothing parameters  $(g_1, g_2, \alpha)$  is called quasi-optimal, if it allows for  $\widehat{m}_{\alpha,n}$  in (31) to attain the bounds in (19).

**Theorem 5.5** Assume that C.5.1 through C.5.5 hold, with  $p_0 = p_1$ , and  $U_\alpha(\cdot)$  satisfies C.3.1 and C.3.2, with  $\bar{\mu} \geq 1$ .

(i) Let  $m_0$  be any function in  $\mathcal{M}_{1/2,\rho}$ . Suppose that the bandwidth parameters  $(g_1, g_2)$  satisfy a side condition such that  $(ng_1^{d_1})^{-1/2} \leq O(g_1^{p_0/2})$ , and  $g_2^{2p_0} \leq O([ng_2^{d_2}]^{-1/2})$ . Then, the optimal convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$  is given by  $\|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} = O_p(n^{-\frac{p_0}{4p_0+d_2}})$ , under the of smoothing parameters such that  $g_{1n}^* = C_0 n^{-\frac{1}{p_0+d_1}}$ ,  $g_{2n}^* = C_1 n^{-\frac{1}{4p_0+d_2}}$ , and  $\alpha_n^* = C_2 n^{-\frac{2p_0}{4p_0+d_2}}$ .

(ii) Let  $m_0$  be any function in  $\mathcal{M}_{1,\rho}$ . Suppose a side condition on  $(g_1, g_2)$  such that  $(ng_1^{d_1})^{-1/2} \leq O(g_1^{2p_0/3})$ , and  $g_2^{3p_0/2} \leq O([ng_2^{d_2}]^{-1/2})$ . Then, the optimal convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$  is given by  $\|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} = O_p(n^{-\frac{p_0}{3p_0+d_2}})$ , under the optimal choice of smoothing parameters such that  $g_{1n}^* = C_0 n^{-\frac{1}{(4/3)p_0+d_1}}$ ,  $g_{2n}^* = C_1 n^{-\frac{1}{3p_0+d_2}}$ , and  $\alpha_n^* = C_2 n^{-\frac{p_0}{3p_0+d_2}}$ .

**Remark 5.2** (i) Minimizing the lower bounds in Theorem 5.4 w.r.t.  $(g_1, g_2, \alpha)$  can provide an alternative way to find the optimal choice of the smoothing parameters. Due to trade-off between the variance and bias terms, the lower bounds corresponding to  $m_0 \in \mathcal{M}_{1,\rho}$ , for example, are minimized by  $(g_{1n}^{**}, g_{2n}^{**}, \alpha_n^{**})$  such that  $1/\sqrt{n\alpha_n^{**}g_{2n}^{**d_2}} \simeq g_{2n}^{**p_0}$ ,  $1/\sqrt{ng_{1n}^{**d_1}} \simeq g_{1n}^{**p_0}/\sqrt{\alpha_n^{**}}$ , and  $\alpha_n^{**} \simeq (1/\sqrt{ng_{2n}^{**d_2}} + g_{1n}^{**p_0})/\sqrt{\alpha_n^{**}}$ . From  $g_{2n}^{**} \simeq (n\alpha_n^{**})^{-1/(2p_0+d_2)}$  and  $g_{1n}^{**} \simeq (n/\alpha_n^{**})^{-1/(2p_0+d_1)}$ , it follows that  $g_{1n}^{**p_0}\sqrt{ng_{2n}^{**d_2}} = o(\alpha_n^{**p_0-d_2/2/(2p_0+d_2)}) = o(1)$ , by the assumptions of  $d_1 \leq d_2$  and  $d_2/2 \leq p_0$ , implying that  $\alpha_n^{**} \simeq 1/\sqrt{n\alpha_n^{**}g_{2n}^{**d_2}}$ . As a consequence,  $\alpha_n^{**} \simeq \alpha_n^* \simeq n^{-\frac{p_0}{3p_0+d_2}}$  and  $g_{2n}^{**} \simeq g_{2n}^* \simeq n^{-\frac{1}{3p_0+d_2}}$ , which leads to the same convergence rate as in Theorem 5.5.(ii). Difference of  $g_{1n}^{**}$  from  $g_{1n}^*$  only affects the terms of second order.

(ii) When  $p_0 = 2$  and  $d_2 = 1$ , we get, from Theorem 5.5.(ii),  $\|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} = O_p(n^{-\frac{2}{7}})$ , which is faster than the rate  $O_p(n^{-\frac{1}{4}})$  of Darolles, Florens, and Renault (2001), but slower than  $O_p(n^{-\frac{2}{5}})$  available for kernel estimation of reduced forms. Roughly speaking, the optimal choice  $(g_{1n}^*, g_{2n}^*)$  requires undersmoothing in the direction of  $Z$  and oversmoothing in the direction of  $W$ , compared to the standard kernel estimation of joint density functions. ■

Results in Theorem 5.4 and 5.5 have been derived only for the benchmark case of  $m_0 \in \mathcal{M}_{1/2}$  or  $\mathcal{M}_1$ , although no specific form of  $U_\alpha(\cdot)$  is assumed except C.3.1 and C.3.2. For a general case of  $m_0 \in \mathcal{M}_\mu$  (with  $\mu > 0$ ), we will use Theorem 4.1 through 4.4 to show the convergence rates of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$ , regularized by (the ordinary/iterated/generalized) Tikhonov and Showalter's methods.

**Theorem 5.6** Assume that C.5.1 through C.5.5 hold with  $p_0 = p_1$ , and  $m_0(\cdot) \in \mathcal{M}_{\mu,\rho}$ , with  $\mu > 0$ .

(i) Let  $\widehat{m}_{\alpha,n}^s$  be given by (31), with  $U_\alpha(\cdot) = U_\alpha^s(\cdot)$  in (25). Then, it holds

$$\|\widehat{m}_{\alpha,n}^s - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq O_p\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\frac{1}{\sqrt{ng_2^{d_2}}} + g_1^{p_0}\right]\right) + O_p(\alpha^\mu) + O_p(\alpha^{\mu-1/2}\left[\frac{1}{\sqrt{ng_1^{d_1}}} + g_2^{p_0}\right]).$$

Assume a side condition on  $(g_1, g_2)$  such that

$$(ng_{1n}^{d_1})^{-1/2} \leq O(g_{1n}^{p_0/(2\mu+1)}), \text{ and } g_{2n}^{p_0(2\mu+1)} \leq O(1/\sqrt{ng_{2n}^{d_2}}).$$

Then, the optimal convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$  is given by

$$\|\widehat{m}_{\alpha,n}^s - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} = O_p(n^{-\frac{2\mu p_0}{2(2\mu+1)p_0+d_2}}),$$

under the choice of smoothing parameters such that

$$g_{1n}^* = C_0 n^{-\frac{(2\mu+1)}{2p_0+(2\mu+1)d_1}}, g_{2n}^* = C_1 n^{-\frac{1}{2(2\mu+1)p_0+d_2}}, \text{ and } \alpha_n^* = C_2 n^{-\frac{2p_0}{2(2\mu+1)p_0+d_2}}.$$

(ii) Let  $\widehat{m}_{\alpha,n}^q$  be given by (31) with  $U_\alpha(\cdot) = U_{q,\alpha}(\cdot)$  or  $U_{q,\alpha}^g(\cdot)$ , as defined in section 4, where  $q \geq 1$ .

Then, it holds

$$\|\widehat{m}_{\alpha,n}^q - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq O_p\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\frac{1}{\sqrt{ng_2^{d_2}}} + g_1^{p_0}\right]\right) + O_p(\alpha^{\min(\mu,q)}) + O_p(\alpha^{\min(\mu-1/2,0)}\left[\frac{1}{\sqrt{ng_1^{d_1}}} + g_2^{p_0}\right]).$$

Assume a side condition on  $(g_1, g_2)$  such that

$$(ng_{1n}^{d_1})^{-1/2} \leq O(g_{1n}^{2\mu_q^\dagger p_0/(2\mu_q+1)}), \text{ and } g_{2n}^{p_0(2\mu_q+1)/2\mu_q^\dagger} \leq O(1/\sqrt{ng_{2n}^{d_2}}),$$

where  $\mu_q = \min(\mu, q)$  and  $\mu_q^\dagger = \max(\mu_q, 1/2)$ . Then, the optimal convergence rate is given by

$$\|\widehat{m}_{\alpha,n}^q - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} = O_p(n^{-\frac{2\mu_q p_0}{2(2\mu_q+1)p_0+2\mu_q^\dagger d_2}}),$$

under the choice of smoothing parameters such that

$$g_{1n}^* = C_0 n^{-\frac{(2\mu_q+1)}{4\mu_q^\dagger p_0+(2\mu_q+1)d_1}}, g_{2n}^* = C_1 n^{-\frac{2\mu_q^\dagger}{2(2\mu_q+1)p_0+2\mu_q^\dagger d_2}}, \text{ and } \alpha_n^* = C_2 n^{-\frac{2p_0}{2(2\mu_q+1)p_0+2\mu_q^\dagger d_2}}.$$

The optimal rates of convergence in Theorem 5.6 can be obtained by minimizing (w.r.t.  $g_1$ ,  $g_2$ , and  $\alpha$ ) the lower bounds given in Theorem 5.6. As in Remark 5.2, two methods give rise to the same choice of  $(g_{2n}^*, \alpha_n^*)$ , with different  $g_1$ 's of only second-order effect.

**Remark 5.3** (i) Note that the lower bounds in Theorem 5.6.(i) are sharper than that of Theorem 5.4.(ii), at least for  $m_0 \in \mathcal{M}_{1,\rho}$ . The improvement occurs because the former, unlike the latter, has been derived under a specific feature of Showalter's method. By means of a weaker side condition, Showalter's method can possibly give the faster optimal rate of convergence than are allowed by Theorem 5.5.(ii), which is based on a general regularization method of C.3.1 and C.3.3. The optimal rates of convergence of  $\widehat{m}_{\alpha,n}^s$  and  $\widehat{m}_{\alpha,n}^q$  are the same, only for the case with  $\mu \leq 1/2$ , where  $\mu_q = \mu$  and  $\mu_q^\dagger = 1/2$ . Otherwise, the former is better. For  $q < \mu$ , the convergence rates of  $\widehat{m}_{\alpha,n}^q$  do not improve, as  $\mu$  increases. This confirms the fact that the three variants of Tikhonov methods are not free from the saturation effects, due to finite-qualification.

(ii) Theorem 5.6 shows that the convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}^s$  gets faster, as  $p_1(= p_0)$  or  $\mu$  increase, i.e.,  $m_0$  becomes smoother. Kernel estimation of structural functions also suffers from the curse of dimensionality. Here, the dimensionality is determined by  $W$ , rather than  $X$ . This may seem natural, if we consider that statistical properties of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$  depend crucially on the accuracies of the preliminary estimates  $\widehat{h}_0$  and  $\widehat{T}_n$ . Assuming  $\dim(W) \geq \dim(X)$  as a regularity condition, the optimal convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}^s$  will deteriorate as  $\dim(X)$  increases. Owing to ill-posedness of the problems, Stones's bounds are not attainable by  $\widehat{m}_{\alpha,n}^s$ , when  $p_0 > (d_2/2)(2\mu + 1)$ . We think that the condition is not too strong, since greater  $\mu$  is generally accompanied by higher order of differentiability. ■

### 5.3 Numerical Example

In this section, we carry out a small scale Monte Carlo experiment to investigate the finite sample properties of the kernel IV estimators studied in the previous sections. The design for simulation is as follows. Assuming that  $(X, W, \varepsilon)' \sim N(0, \Sigma)$ , samples  $\{(Y_i, X_i, W_i)\}_{i=1}^n$  of size  $n = 200$  are generated from a bivariate model,

$$Y_i = \sqrt{2} \cos(X_i) + \varepsilon_i, \quad (32)$$

where

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{8} \\ 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{8} & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Our interest is in applying the kernel IV estimates ( $\widehat{m}_{\alpha,n}$ ) in (29) to estimate the regression function ( $m_0(x) \equiv \sqrt{2} \cos(x)$ ) of the model (32). To see how different regularization methods perform in finite samples, we will consider the kernel estimates regularized by OTR/ITR(2)/GTR(2) and SW. The specific forms of the preliminary estimates in (27) and (28) are fixed by the gaussian kernel function, together with the common bandwidth parameters;

$$(g_1, g_2) = (g, g), \text{ with } g \in G = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}.$$

For practical reasons, various regularization parameters are used in calculating  $\widehat{m}_{\alpha,n}$  such that

$$\alpha \in A = \{0.001, 0.005, 0.01, 0.015, 0.02\}.$$

As argued in Remark 5.1, no numerical integration is necessary for computing  $M_W$  or  $Q_{X,W}$ , in this (gaussian kernel) case. For each simulated data, we compute  $\widehat{m}_{\alpha,n}(x)$  at the 19 quantiles (from 5% through 95%) of  $x$ , obtaining a sample pointwise MSE (mean squared errors) of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$ . The same procedure is repeated 1000 times for the whole experiment, which allows us to approximate the true MSE by averaging the sample MSE's over all repetitions. The simulation results are summarized in Table 1, showing the estimated MSE of the various regularized estimates, as well as its decomposition into the squared-bias and variance terms (the two numbers in the parenthesis). The bias term is computed by comparing the true function ( $m_0(\cdot)$ ) and an average (over repetitions) of the estimates ( $\widehat{m}_{\alpha,n}$ ) at each fixed quantile of  $x$ . The variance term is defined by the rest of MSE from the squared-bias. Figure 1(a) through (d) display the averaged estimates of the four regularization methods over various  $\alpha$ 's, with  $g$  set to be a representative value of 0.4. Figure 2 collects some of those averaged estimates that correspond to the optimal choice of  $\alpha$  (with  $g = 0.4$ ), where the optimality criterion is to minimize MSE. Our interpretation of the results is as follows.

(i) Both Table 1 and Figure 1 show that the regularized IV estimates perform reasonably well under the given sample size, as long as  $\alpha$  is not too small (i.e., for  $\alpha \geq 0.005$ ). To one's expectation, the naive kernel estimates (corresponding to  $\alpha = 0$ , not shown) turn out to suffer from drastically large MSE's, indicative of the instability problem due to ill-posedness of the IV estimation.

(ii) When  $\alpha = 0.005$  is chosen, four different regularization methods show similar values of MSE. We achieve slight improvements in the bias term from using ITR(2) or SW rather than OTR. However, the gains are blurred by increases in the variance term, implying that the overall performances of the four methods are similar to each other.

(iii) For other values of  $\alpha$  ( $\geq 0.01$ ), the MSE of OTR is much larger than that of other regularization methods. As  $\alpha$  increases, the OTR estimates are getting worse, while the estimates from ITR(2),

GTR(2) and SW are still performing well or even better. The bias-variance decompositions in Table 1 reveal that such deterioration in the statistical errors of OTR is attributable to a larger increase in the (regularization) bias term. This also can be corroborated from looking at Fig. 1 which depicts different bias-characteristics of OTR and ITR(2)/GTR(2)/SW by varying a regularization parameter  $\alpha$ . Roughly speaking, our simulation results partly support the asymptotic results in section 4 that the refined regularization methods of ITR, GTR and SW have an advantage in bias reduction over OTR.

(iv) To summarize, given the simulation design in (32), we get similar minimum MSE's from the regularization methods of OTR/ITR(2)/GTR(2) and SW, applied to the kernel IV estimates in (29); see the numbers with \* in Table 1. That is, the four methods show no significant differences in statistical accuracies, when the smoothing parameters are chosen optimally.<sup>16</sup> Fig. 2 highlights the similarities in the bias terms of different methods for that case. As argued in (iii), the finite sample properties of OTR, however, are quite different from the other methods in that the bias term of the former is highly sensitive to a small change from the optimal regularization parameter.

## A Appendices

### A.1 Section 2

**Proof of Theorem 2.2** (i) Suppose that  $T$  is not one-to-one, i.e., there exists a nonzero function  $m^* \in L^2(\mathcal{X})$  such that  $(Tm^*)(w) = 0$ , for all  $w \in \mathcal{W}$ . From

$$(Tm^*)(\omega_l) = \int_{\mathcal{X}} m^*(x) f_{X,W}(x, \omega_l) dx = \langle m^*(\cdot), f_{X,W}(\cdot, \omega_l) \rangle_{L^2(\mathcal{X})} = 0, \text{ for any } \omega_l \in \overline{\mathcal{W}},$$

it follows that  $m^*$  is orthogonal to any linear combination of  $\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^{\infty}$ , i.e.,

$$m^* \in [\text{lin}\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^{\infty}]^{\perp}.$$

Since the orthogonal complement of  $\text{lin}\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^{\infty}$  includes a nonzero function,  $\overline{\text{lin}\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^{\infty}}$  is a proper subset of  $L^2(\mathcal{X})$ , contradicting to denseness of  $\text{lin}\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)$  in  $L^2(\mathcal{X})$ .

(ii) Noting that  $\overline{\mathcal{R}}(T) = \mathcal{N}^{\perp}(T^*)$ , it suffices to show that  $T^*$  is one-to-one from  $L^2(\mathcal{W})$  to  $L^2(\mathcal{X})$ , under C.2.2. The proof is direct from symmetry of the argument used in (i). ■

---

<sup>16</sup>This occurs when the degree of the abstract smoothness of  $m_0$  does not exceed one. See the arguments in Theorem 3.3, for example.

**Proof of Theorem 2.3** (i) Suppose that C.2.1 is violated for some dense subset  $\overline{\mathcal{W}}$  of  $\mathcal{W}$ , i.e.,  $[\text{lin}\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^\infty]^\perp$  is not empty. Then, there exists nonzero  $m^*$  in  $L^2(\mathcal{X})$ , which is orthogonal to any linear combination of  $\{f_{X,W}(\cdot, \omega_l)\}_{l=1}^\infty$ . Letting  $h^*(w) \equiv (Tm^*)(w)$ , this implies that

$$h^*(w) = \int_{\mathcal{X}} m^*(x) f_{X,W}(x, w) dx = \langle m^*(\cdot), f_{X,W}(\cdot, w) \rangle_{L^2(\mathcal{X})} = 0, \text{ for all } w \in \overline{\mathcal{W}}.$$

Note that  $h^*(\cdot)$  is continuous in  $w$ , due to continuity of  $f_{X,W}(\cdot, \cdot)$  on  $\mathcal{X} \times \mathcal{W}$ . Since  $h^*(\cdot) = 0$ , on a dense subset of  $\mathcal{W}$ , it follows from continuity of  $h(\cdot)$  that  $h^*(w) = (Tm^*)(w) = 0$ , for all  $w \in \mathcal{W}$ , which contradicts to the assumption that  $T$  is one-to-one.

(ii) From  $\overline{\mathcal{R}}(T) = \mathcal{N}^\perp(T^*)$ , the proof is direct from symmetry of the argument for showing part (i). ■

**Proof of Theorem 2.4** We only show the first assertion, since the second is clear by symmetry. Suppose that there exists nonzero  $m_0(\cdot) \in L^2(\mathcal{X})$  with  $Tm_0 = 0$ . This means that there exists a subset  $\overline{\mathcal{W}}_1$  of  $\mathcal{W}_1$  (with  $\overline{\mathcal{W}}_1$  not measure zero) such that  $m_0(z, \omega_1)$  is a nonzero function of  $z$ , for all  $\omega_1 \in \overline{\mathcal{W}}_1$ , but  $(T_{\omega_1}m_0)(w_2) = 0$ , for all  $\omega_1 \in \overline{\mathcal{W}}_1$ , where  $T_{\omega_1} : L^2(\mathcal{Z}) \rightarrow L^2(\mathcal{W}_2)$  is given by  $(T_{\omega_1}m)(w_2) = \int_{\mathcal{Z}} m(z, \omega_1) f_{Z,W_1,W_2}(z, \omega_1, w_2) dz$ . Since for all  $\omega_1 \in \overline{\mathcal{W}}_1$ ,  $\text{lin}\{f_{Z,W_1,W_2}(\cdot, \omega_1, \omega_{2l})\}_{l=1}^\infty$  is dense in  $L^2(\mathcal{Z})$ , it follows that  $\|P_{f_L^\omega} m(\cdot, \omega_1) - m(\cdot, \omega_1)\|_{L^2(\mathcal{Z})} \rightarrow 0$ , as  $L \rightarrow \infty$ , for any  $m(\cdot, \omega_1) \in L^2(\mathcal{Z})$ . Consequently, there exists  $L^*$  (depending on  $m_0$ ) such that  $\|P_{f_L^\omega} m_0(\cdot, \omega_1)\|_{L^2(\mathcal{Z})} \geq \|m_0(\cdot, \omega_1)\|_{L^2(\mathcal{Z})}/2 > 0$ . This is a contradiction, since, from  $T_{\omega_1}m_0 = 0$ ,

$$(P_{f_L^\omega} m_0(\cdot, \omega_1))(z, \omega_1) = f_L^\omega(z)' Q_{\omega\omega}^* \{ \{ T_{\omega} m_0(\cdot, \omega_1) \}_{l=1}^L \} = 0, \text{ for any } L (\geq 1).$$

■

## A.2 Section 3

The following lemmas are useful for showing the main results of Section 3 and 4.

**Definition** A sequence of linear random operators  $\widehat{T}_n : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  is asymptotically one-to-one, if and only if  $P_{\mathcal{N}(\widehat{T}_n)}$  converges pointwise to zero, in probability; i.e., for any  $m \in \mathcal{M}$ ,  $\|P_{\mathcal{N}(\widehat{T}_n)} m\|_{\mathcal{M}} \xrightarrow{P} 0$ .

**Lemma 3.1** Assume that a sequence of random operators  $\widehat{T}_n : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  converges pointwise, in probability, to a bounded operator  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  which is one-to-one, where  $\mathcal{M}$  and  $\mathcal{H}$  are a Hilbert space. Then,  $\widehat{T}_n : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  is asymptotically one-to-one.

**Proof.** From  $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*T) = \mathcal{R}^\perp(T^*T)$ , injectivity of  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  is equivalent to that  $T^*T$  has a dense range in  $\mathcal{M}$ . That is, for any arbitrary element  $m_0$  in  $\mathcal{M}$ , there exists a sequence  $\{m_l\}_{l=1}^\infty$  such that  $T^*Tm_l \rightarrow m_0$ , as  $l \rightarrow \infty$ . By the triangle inequality, for any  $l$ ,

$$\|(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n - T^*T)m_l\|_{\mathcal{M}} \leq \|\widehat{T}_n^*(\widehat{T}_n - T)m_l\|_{\mathcal{M}} + \|(\widehat{T}_n^* - T^*)Tm_l\|_{\mathcal{M}}, \text{ a.s.} \quad (33)$$

From  $(\widehat{T}_n^* - T^*) = (\widehat{T}_n - T)^*$ , pointwise convergence of  $\widehat{T}_n$  to  $T$  implies that, for any  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} \|(\widehat{T}_n^* - T^*)h\|_{\mathcal{M}}^2 &= \langle (\widehat{T}_n^* - T^*)h, (\widehat{T}_n^* - T^*)h \rangle_{\mathcal{M}} \\ &= \langle h, (\widehat{T}_n - T)\tilde{m} \rangle_{\mathcal{H}} \xrightarrow{p} 0, \text{ as } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

by continuity of the inner product, where  $\tilde{m} = (\widehat{T}_n^* - T^*)h$ . This shows negligibility of the second term in the righthand-side of (33). In addition, for any fixed  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\|\widehat{T}_n^*h\|_{\mathcal{M}} \leq \|(\widehat{T}_n^* - T^*)h\|_{\mathcal{M}} + \|T^*h\|_{\mathcal{M}} \leq C\|T^*h\|_{\mathcal{M}}$ , for  $n$  sufficiently large, which, by boundedness of  $T$ , gives

$$\sup_n \|\widehat{T}_n^*h\|_{\mathcal{M}} = O_p(1), \text{ for each } h \in \mathcal{H}.$$

By the Principle of Uniform Boundedness-see Taylor and Lay (1980, p.190), the above implies that the sequence  $\{\widehat{T}_n^*\}$  is bounded uniformly in  $n$ , i.e.,  $\sup_n \|\widehat{T}_n^*\|_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}} = O_p(1)$ .<sup>17</sup> Negligibility of the first term in the righthand-side of (33) follows from pointwise convergence of  $\widehat{T}_n$  to  $T$ , since  $\|\widehat{T}_n^*(\widehat{T}_n - T)m_l\|_{\mathcal{M}} \leq \|\widehat{T}_n^*\|_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}} \|(\widehat{T}_n - T)m_l\|_{\mathcal{M}} = O_p(1) \|(\widehat{T}_n - T)m_l\|_{\mathcal{M}} \xrightarrow{p} 0$ , as  $n \rightarrow \infty$ , for any  $m_l \in \mathcal{M}$ . In consequence,  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$  converges pointwise to  $T^*T$  in  $\mathcal{M}$ , which, together with the definition of  $\{m_l\}_{l=1}^\infty$ , leads to

$$\|(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)m_l - m_0\|_{\mathcal{M}} \leq \|(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n - T^*T)m_l\|_{\mathcal{M}} + \|(T^*T)m_l - m_0\|_{\mathcal{M}} \xrightarrow{p} 0, \text{ as } \max(n, l) \rightarrow \infty.$$

Using  $\mathcal{M} = \mathcal{R}^\perp(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \oplus \overline{\mathcal{R}}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)$ , we have, by the orthogonal projection in Hilbert space, that  $m_0 = P_{\mathcal{R}^\perp(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)} m_0 + P_{\overline{\mathcal{R}}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)} m_0$ , yielding

$$\begin{aligned} \|P_{\mathcal{R}^\perp(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)} m_0\|_{\mathcal{M}} &= \|P_{\mathcal{R}^\perp(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)} m_0\|_{\mathcal{M}} = \|P_{\overline{\mathcal{R}}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)} m_0 - m_0\|_{\mathcal{M}} \\ &= \inf_{m \in \overline{\mathcal{R}}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)} \|m - m_0\|_{\mathcal{M}} \leq \|(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)m_l - m_0\|_{\mathcal{M}} \xrightarrow{p} 0, \text{ as } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

---

<sup>17</sup>Suppose that  $\mathcal{M}$  and  $\mathcal{H}$  are normed linear spaces, and  $\mathcal{M}$  is complete. Let  $\{T_n\}_{n=1}^\infty$  be a sequence of linear bounded operators,  $T_n : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$ , such that

$$\sup_{n \geq 1} \|T_n m\|_{\mathcal{H}} < \infty, \text{ for each } m \in \mathcal{M}.$$

Then,  $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < \infty$ .

where the last inequality holds from  $(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) m_l \in \overline{\mathcal{R}}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)$ . Since this result holds for any  $m_0 \in \mathcal{M}$ , and  $\mathcal{N}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) = \mathcal{N}(\widehat{T}_n)$ , the assertion is proved. ■

**Lemma 3.2** Suppose that  $U_\alpha(\cdot)$  satisfies C.3.1, and  $\widehat{T}_n : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  has a finite rank. If  $\alpha = \alpha(n) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ , then,

$$(i) \quad \|U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} = O_{a.s.}(\alpha^{-1}),$$

$$(ii) \quad \|\widehat{R}_{\alpha,n}\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} = O_{a.s.}(\sqrt{\alpha^{-1}}),$$

Assume additionally that  $\widehat{T}_n : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  converges pointwise, in probability, to  $T : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  which is bounded and one-to-one. Then,

$$(iii) \quad \|[U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n - I]m\|_{L^2(\mathcal{X})} = o_p(1), \text{ for all } m \in L^2(\mathcal{X}).$$

**Proof** From finite rank of  $\widehat{T}_n$ , the self-adjoint operator  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$  is compact and thereby has a spectral representation, such as  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n(\cdot) = \sum_{j=1}^{J_n} \lambda_j P_{v_j}$ , where  $\lambda_j$ 's and  $P_{v_j}$ 's denote the eigenvalues of  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$  and the orthogonal projection onto the eigenspace generated by the eigenfunction,  $v_j$ , that corresponds to  $\lambda_j$ , respectively. With  $\bar{\lambda} = \sup_{n \geq n_0} \{ \|\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \}$ , we get, by spectral calculus, that

$$\begin{aligned} \|U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 &= \sum_{j=1}^{J_n} U_\alpha^2(\lambda_j) \|P_{v_j} m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 \leq \sup_{\lambda \in (0, \bar{\lambda}]} |U_\alpha(\lambda)|^2 \sum_{j=1}^{J_n} \|P_{v_j} m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 \\ &\leq \alpha^{-2} \left\| \sum_{j=1}^{J_n} P_{v_j} m \right\|_{L^2(\mathcal{X})}^2, \text{ a.s. for } \alpha \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

where the last inequality comes from C.3.1(iii) and orthogonality of  $v_j$  and  $v_{j'}$ , for  $j \neq j'$ . Since  $\sum_{j=1}^{J_n} P_{v_j}$  is itself a projection operator, it holds that  $\|\sum_{j=1}^{J_n} P_{v_j}\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \leq 1$ , implying

$$\|U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}^2 = \sup_{m \in L^2(\mathcal{X})} \|U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 / \|m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 \leq \alpha^{-2} \left\| \sum_{j=1}^{J_n} P_{v_j} \right\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 = \alpha^{-2}, \text{ a.s.}$$

This completes the proof for (i). In a similar way, letting  $Q_j$  be the projection onto the space generated by  $\widehat{T}_n v_j \in L^2(\mathcal{W})$ , the singular values decomposition of  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$  yields

$$\begin{aligned} \|U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* h\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 &= \sum_{j=1}^{J_n} U_\alpha^2(\lambda_j) \lambda_j \|Q_j h\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 \leq \sup_{\lambda} |U_\alpha(\lambda) \lambda| \sup_{\lambda} |U_\alpha(\lambda)| \sum_{j=1}^{J_n} \|Q_j h\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 \\ &\leq \sup_{\lambda} |U_\alpha(\lambda) \lambda| \sup_{\lambda} |U_\alpha(\lambda)| \|h\|_{L^2(\mathcal{W})}^2, \text{ a.s.} \end{aligned}$$

From C.3.1(i) and (iii), we get

$$\sup_{h \in L^2(\mathcal{W})} \frac{\|U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* h\|_{L^2(\mathcal{X})}^2}{\|h\|_{L^2(\mathcal{W})}^2} \leq C \sup_{\lambda} |U_\alpha(\lambda)| \leq C\alpha^{-1}, \text{ a.s.},$$

proving (ii). For a proof of (iii), we let  $J_{n,1} = \{j \in I_+ : j \leq J_n, \lambda_j > 0\}$ , and  $P_{\mathcal{N}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)}$  the orthogonal projection onto the null space of  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$ . From  $U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n = \sum_{j \in J_{n,1}} U_\alpha(\lambda_j) \lambda_j P_{v_j}$ , and  $I = \sum_{j \in J_{n,1}} P_{v_j} + P_{\mathcal{N}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)}$ , it follows that

$$\begin{aligned} & \| [U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n - I] m \|_{L^2(\mathcal{X})}^2 \\ &= \sum_{j \in J_{n,1}} [U_\alpha(\lambda_j) \lambda_j - 1]^2 \|P_{v_j} m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 + \|P_{\mathcal{N}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)} m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2. \end{aligned}$$

By the Dominated Convergence Theorem, the first term converges to zero, a.s., as  $n \rightarrow 0$ , since, by C.3.1(ii),

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{j \in J_{n,1}} [U_\alpha(\lambda_j) \lambda_j - 1]^2 \|P_{v_j} m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 = \sum_j \lim_{\alpha \rightarrow 0} [U_\alpha(\lambda_j) \lambda_j - 1]^2 \|P_{v_j} m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 = 0, \text{ a.s.}$$

Negligibility of the second term, i.e.,  $\|P_{\mathcal{N}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)} m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 = o_p(1)$ , is immediate from Lemma 3.1, since  $\mathcal{N}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) = \mathcal{N}(\widehat{T}_n)$ . ■

The following lemma is well known in mathematical theory of inverse problems, see, for example. We introduce the proof, just for completeness of arguments.

**Lemma 3.3** Let  $G : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})$  be a linear bounded operator and  $G^* : L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})$  be adjoint to  $G$ . If  $U_\alpha$  satisfies C.3.2, then, for all  $m \in L^2(\mathcal{X})$ ,

$$(i) \quad \| [U_\alpha(G^* G) G^* G - I] (G^* G)^\mu \|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \leq C\alpha^{\min(\mu, \bar{\mu})}, \text{ for } \mu > 0.$$

$$(ii) \quad \| [U_\alpha(G^* G) G^* G - I] G^* \|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \leq C\alpha^{1/2}, \text{ for } \mu > 0.$$

**Proof** (i) Let  $\{E_\lambda\}$  be a spectral family for  $G^* G$  such that

$$[U_\alpha(G^* G) G^* G - I] (G^* G)^\mu = \int_0^\infty (U_\alpha(\lambda) \lambda - 1) \lambda^\mu dE_\lambda.$$

By spectral theory, for  $m \in L^2(\mathcal{X})$ ,

$$\| [U_\alpha(G^* G) G^* G - I] (G^* G)^\mu m \|_{L^2(\mathcal{X})}^2 = \int_0^\infty [(U_\alpha(\lambda) \lambda - 1) \lambda^\mu]^2 d\|E_\lambda m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2.$$

From  $\int_0^\infty d\|E_\lambda m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 = \|m\|^2 < \infty$ , we have, by C.3.2, that

$$\| [U_\alpha(G^*G)G^*G - I](G^*G)^\mu m \|_{L^2(\mathcal{X})} \leq C \sup_{\lambda \in (0, \bar{\lambda})} \lambda^\mu |U_\alpha(\lambda)\lambda - 1| \leq C' \alpha^\mu.$$

The proof for (ii) is immediate from (i), since  $\mathcal{R}(G^*) = \mathcal{R}((G^*G)^{1/2})$ , for any linear bounded operator  $G$ . ■

**Proof of Proposition 3.1** Suppose that  $\sup_n \|\widehat{T}_n^\dagger\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} = O_p(1)$ . Then, from uniform convergence of  $\widehat{T}_n$  to  $T$  on  $\mathcal{M}_X$ , it follows that

$$\|\widehat{T}_n^\dagger(\widehat{T}_n - T)\|_{\mathcal{M}_X \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \leq \|\widehat{T}_n^\dagger\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \|\widehat{T}_n - T\|_{\mathcal{M}_X \rightarrow L^2(\mathcal{W})} = O_p(1) \|\widehat{T}_n - T\|_{\mathcal{M}_X \rightarrow L^2(\mathcal{W})} \xrightarrow{p} 0,$$

i.e.,  $\widehat{T}_n^\dagger \widehat{T}_n$  converges  $\widehat{T}_n^\dagger T$  uniformly on  $\mathcal{M}_X$ , in probability. From the identity,  $I - \widehat{T}_n^\dagger T = P_{\mathcal{N}(\widehat{T}_n)}$ -see Groetsch (1977), we get, by Lemma 3.1, that  $\|\widehat{T}_n^\dagger \widehat{T}_n - I\|_{\mathcal{M}_X \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \xrightarrow{p} 0$ . Consequently, by the triangle inequality,

$$\|\widehat{T}_n^\dagger T - I\|_{\mathcal{M}_X \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \leq \|\widehat{T}_n^\dagger(\widehat{T}_n - T)\|_{\mathcal{M}_X \rightarrow L^2(\mathcal{X})} + \|\widehat{T}_n^\dagger \widehat{T}_n - I\|_{\mathcal{M}_X \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \xrightarrow{p} 0.$$

That is, for any  $h \in T(\mathcal{M}_X)$ ,  $\widehat{T}_n^\dagger h$  converges to  $T^{-1}h$ , in probability, which, by the Principle of Uniform Boundedness, implies that  $\sup_n \|\widehat{T}_n^\dagger - T^{-1}\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} = O_p(1)$ . From

$$\|T^{-1}\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \leq \|\widehat{T}_n^\dagger - T^{-1}\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} + \|\widehat{T}_n^\dagger\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} = O_p(1),$$

follows boundedness of the mapping,  $T^{-1} : T(\mathcal{M}_X) \rightarrow \mathcal{M}_X$ . Since  $\{\widehat{T}_n\}$  is a sequence of compact operators (from  $\dim[\mathcal{R}(\widehat{T}_n)] < \infty$ ), the limit of  $\{\widehat{T}_n\}$ , i.e.,  $T$ , is also compact on  $\mathcal{M}_X$ . By injectiveness of  $T$ ,  $\dim[T(\mathcal{M}_X)] = \dim[\mathcal{M}_X] = \infty$ , which contradicts to the fact that a compact operator cannot have a bounded inverse, when its range space is infinite-dimensional; see Kress (1989, p20). ■

**Proof of Theorem 3.2** The result is direct from the triangle inequality and application of Lemma 3.2 (ii) and (iii) to (13).

**Proof of Theorem 3.3** (i) Since  $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{R}((T^*T)^{1/2})$ , it follows from (13) that the error decomposition for  $m_0 \in \mathcal{M}_{1/2}$  is given by

$$\widehat{R}_{\alpha,n}(\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0) + [(\widehat{\Gamma}_\alpha - I)\widehat{T}_n^*]h_1 - (\widehat{\Gamma}_\alpha - I)(\widehat{T}_n^* - T^*)h_1,$$

where  $h_1 = T^{*-1}(m_0)$ . By Lemma 3.2(ii),  $L^2$ -norm of the first term is bounded by  $\frac{C_1}{\sqrt{\alpha}} \|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})}$ , almost surely. By Lemma 3.3(i) and (ii),  $(\widehat{\Gamma}_\alpha - I)$  and  $(\widehat{\Gamma}_\alpha - I)\widehat{T}_n^*$  are uniformly bounded by  $C_3$  and  $C_2 \alpha^{1/2}$ , almost surely, respectively, which proves the first assertion.

(ii) For the case with  $m_0 \in \mathcal{M}_1$ , the error decomposition takes form of

$$\widehat{R}_{\alpha,n}(\widehat{h}_n - \widehat{T}_n m_0) + [(\widehat{\Gamma}_\alpha - I)(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)]m_1 - [(\widehat{\Gamma}_\alpha - I)\widehat{T}_n^*](\widehat{T}_n - T)m_1 - (\widehat{\Gamma}_\alpha - I)(\widehat{T}_n^* - T^*)Tm_1,$$

where  $m_1 = (T^*T)^{-1}m_0$ . The proof for the second assertion follows immediately, if we additionally apply the same uniform-boundedness argument to  $(\widehat{\Gamma}_\alpha - I)(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)$ , again based on Lemma 3.3(i). ■

**Proof of Corollary 3.4** From  $m_0 \in \mathcal{M}_{1/2,\rho}$ ,  $\|h_1\|_{L^2(\mathcal{W})} \leq \rho$ , which, by the definition of operator norm, implies that  $\|(\widehat{T}_n^* - T^*)h_1\|_{L^2(\mathcal{W})} \leq \rho\|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}$ . This proves the first assertion. In a similar way, for  $m_0 \in \mathcal{M}_{1,\rho}$ , we have, by definition, that  $\|m_1\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq \rho$ , and  $\|(\widehat{T}_n - T)m_1\|_{L^2(\mathcal{W})} \leq \rho\|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})}$ . From  $\|T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} \leq C^*$ , it follows that  $\|h_1\|_{L^2(\mathcal{W})} = \|Tm_1\|_{L^2(\mathcal{W})} \leq C^*\rho$ . This, together with  $h_1 \in T(L^2(\mathcal{X}))$ , gives  $\|(\widehat{T}_n^* - T^*)h_1\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq C^*\rho\|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{T(\mathcal{M}_{0,\rho}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}$ . ■

**Proof of Theorem 3.5** Let  $\Omega(\{\delta_k\}, \mathcal{M})$  be the modulus of stochastic equicontinuity for  $\widehat{T}_n^\dagger$  on  $\mathcal{M}$ , i.e.,

$$\Omega(\{\delta_k\}, \mathcal{M}) = \sup_{m \in \mathcal{M}, \|\widehat{T}_k m\|_{L^2(\mathcal{W})} = O_p(\delta_k)} \|m\|_{L^2(\mathcal{X})}.$$

From the definition of the worst-case convergence rate, it holds for any  $R \in \mathfrak{R}$  that

$$\begin{aligned} \Xi(\{\delta_k\}, \mathcal{M}, R) &= \sup_{m \in \mathcal{M}, \|\widehat{h}_k - \widehat{T}_k m\|_{L^2(\mathcal{W})} = O_p(\delta_k)} \mathbb{E}(\|R(\widehat{h}_n) - m\|_{L^2(\mathcal{X})}) \\ &\geq \sup_{m \in \mathcal{M}, \|\widehat{T}_k m\|_{L^2(\mathcal{W})} = O_p(\delta_k)} \mathbb{E}(\|R(0) - m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2) \\ &= \sup_{m \in \mathcal{M}, \|\widehat{T}_k m\|_{L^2(\mathcal{W})} = O_p(\delta_k)} \|m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2, \end{aligned}$$

where the inequality trivially holds for  $\widehat{h}_n = 0$ , and the last equality is due to the assumption,  $R(0) = 0$ . Hence, the modulus of stochastic equicontinuity imposes a bound on the best-possible convergence rate (among the class,  $\mathfrak{R}$ ) in the sense that

$$\inf_{R \in \mathfrak{R}} \Xi(\{\delta_k\}, \mathcal{M}, R) \geq C\Omega(\{\delta_k\}, \mathcal{M}),$$

for some  $C > 0$ . It suffices to show the explicit form of the bound, for  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mu,\rho}$ ;

$$\Omega(\{\delta_n\}, \mathcal{M}_{\mu,\rho}) = O(\delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}).$$

For  $m = (T^*T)^\mu m_\mu \in \mathcal{M}_{\mu,\rho}$ , we have, by the Hölder inequality, that  $\|m\|_{L^2(\mathcal{X})} = \|(T^*T)^\mu m_\mu\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq \|(T^*T)^{\mu+1/2} m_\mu\|_{L^2(\mathcal{X})}^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \|m_\mu\|_{L^2(\mathcal{X})}^{\frac{1}{2\mu+1}}$ . By definition,  $(T^*T)^{\mu+1/2} m_\mu = (T^*T)^{1/2} m$ , and, from  $T^*$  being the adjoint of  $T$ , it follows that

$$\begin{aligned} \|(T^*T)^{1/2} m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 &= \langle (T^*T)^{1/2} m, (T^*T)^{1/2} m \rangle_{L^2(\mathcal{X})} = \langle m, (T^*T) m \rangle_{L^2(\mathcal{X})} \\ &= \langle Tm, Tm \rangle_{L^2(\mathcal{X})} = \|Tm\|_{L^2(\mathcal{X})}^2, \end{aligned}$$

That is,

$$\|m\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq \|(T^*T)^{1/2} m\|_{L^2(\mathcal{X})}^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \|m_\mu\|_{L^2(\mathcal{X})}^{\frac{1}{2\mu+1}} \leq \|Tm\|_{L^2(\mathcal{W})}^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}. \quad (34)$$

By the triangle inequality and pointwise convergence of  $\widehat{T}_n$  to  $T$  in  $L^2(\mathcal{X})$ , it holds for any  $m \in L^2(\mathcal{X})$  that

$$\begin{aligned} \|Tm\|_{L^2(\mathcal{W})} &\leq \|\widehat{T}_n m\|_{L^2(\mathcal{W})} + \|\widehat{T}_n m - Tm\|_{L^2(\mathcal{W})} = \|\widehat{T}_n m\|_{L^2(\mathcal{W})} \left(1 + \frac{\|\widehat{T}_n m - Tm\|_{L^2(\mathcal{W})}}{\|\widehat{T}_n m\|_{L^2(\mathcal{W})}}\right) \\ &\leq \|\widehat{T}_n m\|_{L^2(\mathcal{W})} \left(2 + \frac{\|Tm\|_{L^2(\mathcal{W})}}{\|\widehat{T}_n m\|_{L^2(\mathcal{W})}}\right) \leq C \|\widehat{T}_n m\|, \quad w.p.a.1, \end{aligned}$$

where  $C (> 3)$  does not depend on  $m$ . This, together with (34), implies that, for any  $m \in \mathcal{M}_{\mu,\rho}$ ,

$$\|m\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq C \|\widehat{T}_n m\|_{L^2(\mathcal{W})}^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}, \quad w.p.a.1,$$

leading to

$$\Omega(\{\delta_k\}, \mathcal{M}) = \sup_{m \in \mathcal{M}, \|\widehat{T}_n m\|_{L^2(\mathcal{W})} = O_p(\delta_n)} \|m\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq O_p(\delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}). \quad (35)$$

It only remains to show that the bound in (35) is sharp, i.e., there are some cases that

$$\Omega(\{\delta_n\}, \mathcal{M}_{\mu,\rho}) = O_p(\delta_n^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}).$$

Let  $\delta_k^2/\rho^2$  be given by an eigenvalue of the operator  $(T^*T)^{1+2\mu}$  and  $v_k$  be the corresponding eigenfunction with  $\|v_k\| = \rho$ . For  $m_k \equiv (T^*T)^\mu v_k \in \mathcal{M}_{\mu,\rho}$ , it holds that  $\|Tm_k\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 = \|T(T^*T)^\mu v_k\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 = \langle (T^*T)^{1+2\mu} v_k, v_k \rangle_{L^2(\mathcal{X})} = \delta_k^2$ , since  $(T^*T)^{1+2\mu} v_k = (\delta_k^2/\rho^2) v_k$ , from the definition of an eigenvalue. By double use of the triangle inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \|\widehat{T}_n m_k\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 &\leq \|Tm_k\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 + \|(\widehat{T}_n - T)m_k\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 \leq \|Tm_k\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 \left(1 + \frac{\|(\widehat{T}_n - T)m_k\|_{L^2(\mathcal{W})}^2}{\|Tm_k\|_{L^2(\mathcal{W})}^2}\right) \\ &\leq \|Tm_k\|_{L^2(\mathcal{W})}^2 \left(2 + \frac{\|\widehat{T}_n m_k\|_{L^2(\mathcal{W})}^2}{\|Tm_k\|_{L^2(\mathcal{W})}^2}\right) = O_p(\delta_k^2), \end{aligned}$$

where the last equality comes from pointwise convergence of  $\widehat{T}_n$  to  $T$  (in  $L^2(\mathcal{X})$ ) in probability. From  $m_k \in \mathcal{M}_{\mu,\rho}$  and  $\|\widehat{T}_n m_k\|_{L^2(\mathcal{W})} = O_p(\delta_k)$ , it follows that  $\Omega(\{\delta_n\}, \mathcal{M}_{\mu,\rho}) \geq \|m_k\|_{L^2(\mathcal{X})} = \{ \langle (T^*T)^{2\mu} v_k, v_k \rangle_{L^2(\mathcal{X})} \}^{1/2} = \{ (\delta_k^2/\rho^2)^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \langle v_k, v_k \rangle_{L^2(\mathcal{X})} \}^{1/2} = (\delta_k/\rho)^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho \geq C\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}$ . If  $\delta_k^2/\rho^2 \in \sigma((T^*T)^{1+2\mu})$  is not an eigenvalue, then  $\delta_k^2/\rho^2$  belongs to the continuous spectrum of  $(T^*T)^{1+2\mu}$  and there exists a sequence  $\{v_{k,j}\}_{j=1}^\infty$  satisfying  $\|(T^*T)^{1+2\mu} v_{k,j} - (\delta_k^2/\rho^2)v_{k,j}\|_{L^2(\mathcal{X})} \rightarrow 0$ , and  $\|v_{k,j}\|_{L^2(\mathcal{X})} = \rho$ . In this case, too, we can show  $\Omega(\{\delta_n\}, \mathcal{M}_{\mu,\rho}) \geq C\delta_k^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}$ , with a slight modification of the above argument. ■

### A.3 Section 4

In the proofs below, we use the following error decomposition for each regularization

$$\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0 = \widehat{R}_{\alpha,n}(\widehat{h}_n - \widehat{T}_n m_0) + (\Gamma_\alpha - I)(T^*T)^\mu m_\mu + (\widehat{\Gamma}_\alpha - \Gamma_\alpha)(T^*T)^\mu m_\mu, \quad (36)$$

where  $\widehat{R}_{\alpha,n}$ ,  $\widehat{\Gamma}_\alpha$ , and  $\Gamma_\alpha$  have the same definition as in section 3, which, of course, vary over regularization methods.

**Proof of Theorem 4.1** (a) Letting  $\Gamma_{1,\alpha} = U_{1,\alpha}(T^*T)T^*T$  and  $\widehat{\Gamma}_{1,\alpha} = U_{1,\alpha}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$ , the error decomposition of OTR is given by (36), under (15). Since both C.3.1 and C.3.2 hold for  $U_{1,\alpha}(\cdot)$ , the uniform bound for  $\widehat{R}_{\alpha,n}$  and  $(\Gamma_\alpha - I)(T^*T)^\mu$  follows from Lemma 3.2 and 3.3, respectively. From the qualification of OTR equal to one, the second term is bounded by  $C\alpha^{\min(\mu,1)}$ , see Lemma 3.3(i). For the last term in (36), we use  $A^{-1} - B^{-1} = -A^{-1}(A - B)B^{-1}$  to obtain

$$\begin{aligned} (\widehat{\Gamma}_{1,\alpha} - \Gamma_{1,\alpha}) &= -\alpha[(\alpha I + \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{-1} - (\alpha I + T^*T)^{-1}] \\ &= \{\alpha(\alpha I + \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{-1} \widehat{T}_n^*\} (\widehat{T}_n - T) (\alpha I + T^*T)^{-1} \\ &\quad + \alpha(\alpha I + \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{-1} (\widehat{T}_n^* - T^*) T (\alpha I + T^*T)^{-1}. \end{aligned}$$

By Lemma 3.2(ii),  $\alpha^{1/2}(\alpha I + \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{-1} \widehat{T}_n^*$  is bounded (uniform in  $n$ ), and thus

$$\begin{aligned} N_{1,1} &= \|\{\alpha(\alpha I + \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{-1} \widehat{T}_n^*\} (\widehat{T}_n - T) \{(\alpha I + T^*T)^{-1} (T^*T)^\mu m_\mu\}\|_{L^2(\mathcal{X})} \\ &\leq C\alpha^{\min(\mu-1/2, 1/2)} \|(\widehat{T}_n - T) \{\alpha^{\min(1-\mu, 0)} (\alpha I + T^*T)^{-1} (T^*T)^\mu m_\mu\}\|_{L^2(\mathcal{W})}, \\ &= C\alpha^{\min(\mu-1/2, 1/2)} \|(\widehat{T}_n - T) \overline{m}_{\alpha,\mu}\|_{L^2(\mathcal{W})}, \end{aligned}$$

where  $\overline{m}_{\alpha,\mu} = \alpha^{\min(1-\mu, 0)} (\alpha I + T^*T)^{-1} (T^*T)^\mu m_\mu$ , with  $m_\mu \in L^2(\mathcal{X})$ . Note that  $\overline{m}_{\alpha,\mu} \in \mathcal{M}_{\max(\mu-1, 0)}$ .

In a similar way, by uniform boundedness of  $\alpha(\alpha I + \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{-1}$  (from Lemma 3.2(i)),

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= \|\alpha(\alpha I + \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{-1}(\widehat{T}_n^* - T^*)T(\alpha I + T^*T)^{-1}(T^*T)^\mu m_\mu\|_{L^2(\mathcal{X})} \\ &\leq C\alpha^{\min(\mu-1/2,0)}\|(\widehat{T}_n^* - T^*)\{\alpha^{\min(1/2-\mu,0)}T(\alpha I + T^*T)^{-1}(T^*T)^\mu m_\mu\}\|_{L^2(\mathcal{X})} \\ &= C\alpha^{\min(\mu-1/2,0)}\|(\widehat{T}_n^* - T^*)\bar{h}_{\alpha,\mu}\|_{L^2(\mathcal{X})}, \end{aligned}$$

where  $\bar{h}_{\alpha,\mu} = \alpha^{\min(1/2-\mu,0)}T(\alpha I + T^*T)^{-1}(T^*T)^\mu m_\mu$ , and so  $\bar{h}_{\alpha,\mu} \in T^{*-1}(\mathcal{M}_{\max(\mu,1/2)})$ .

(b) For  $m_0 \in \mathcal{M}_{\mu,\rho}$ , both  $\bar{m}_{\alpha,\mu}$  and  $\bar{h}_{\alpha,\mu}$  are bounded by  $C\rho$ , for some  $C > 0$ , implying

$$\begin{aligned} N_{1,1} &\leq C\rho\alpha^{\min(\mu-1/2,1/2)}\|\widehat{T}_n - T\|_{\mathcal{M}_{\max(\mu-1,0)} \rightarrow L^2(\mathcal{W})}, \text{ and} \\ N_{1,2} &\leq C\rho\alpha^{\min(\mu-1/2,0)}\|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{T^{*-1}(\mathcal{M}_{\max(\mu,1/2)}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}, \end{aligned}$$

which completes the proof.  $\blacksquare$

**Proof of Theorem 4.2** Let  $\Gamma_{q,\alpha} = U_{q,\alpha}(T^*T)T^*T$  and  $\widehat{\Gamma}_{q,\alpha} = U_{q,\alpha}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$ . We use the error decomposition in (36) whose first and second terms are analyzed in the same as before, since  $U_{q,\alpha}(\cdot)$  satisfies C.3.1 and C.3.2. The uniform bound of  $(\Gamma_\alpha - I)(T^*T)^\mu$ , which is equal to  $C\alpha^{\min(\mu,q)}$ , follows again from Lemma 3.3, since the qualification of  $U_{q,\alpha}(\cdot)$  is equal to  $q$ . Using

$$\lambda U_{q,\alpha}(\lambda) = \frac{(\alpha + \lambda)^q - \alpha^q}{(\alpha + \lambda)^q} = 1 - [\alpha(\alpha + \lambda)^{-1}]^q,$$

we have, by spectral calculus, that

$$\widehat{\Gamma}_{q,\alpha} - \Gamma_{q,\alpha} = -(\widehat{E}_\alpha^q - E_\alpha^q),$$

where  $\widehat{E}_\alpha = \alpha(\alpha + \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{-1}$  and  $E_\alpha = \alpha(\alpha + T^*T)^{-1}$ . By adding and subtracting  $\widehat{E}_\alpha E_\alpha^{q-1}(T^*T)^\mu$ , the last term of (36) is equivalent to

$$\begin{aligned} \Delta_q &\equiv (\widehat{\Gamma}_{q,\alpha} - \Gamma_{q,\alpha})(T^*T)^\mu = -(\widehat{E}_\alpha^q - E_\alpha^q)(T^*T)^\mu \\ &= -[\widehat{E}_\alpha(\widehat{E}_\alpha^{q-1} - E_\alpha^{q-1})(T^*T)^\mu + (\widehat{E}_\alpha - E_\alpha)E_\alpha^{q-1}(T^*T)^\mu] \\ &= \widehat{E}_\alpha \Delta_{q-1} + \Delta_1 E_\alpha^{q-1}, \end{aligned}$$

where the last equality comes from  $[\alpha(\alpha I + T^*T)]^q(T^*T)^\mu = (T^*T)^\mu[\alpha(\alpha I + T^*T)]^q$ . Using backward induction, we rewrite  $\Delta_q$  as a weighted sum of  $\Delta_1$

$$\Delta_q m_\mu = \sum_{j=0}^{q-1} \widehat{E}_\alpha^j \Delta_1 E_\alpha^{q-1-j} m_\mu,$$

which, by the triangle inequality and uniform boundedness of  $\widehat{E}_\alpha$  and  $E_\alpha$ , yields

$$\|\Delta_q m_\mu\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq C \|\Delta_1 m_\mu\|_{L^2(\mathcal{X})}, \text{ for } q \text{ finite.}$$

By the results on  $\Delta_1 m_\mu \equiv (\widehat{\Gamma}_{1,\alpha} - \Gamma_{1,\alpha})(T^*T)^\mu m_\mu$  given in the proof of Theorem 4.1, the proof is completed. ■

**Proof of Theorem 4.3** Since  $U_{q,\alpha}^g(\cdot)$  satisfies C.3.1 and C.3.2, with  $\bar{\mu}_{GTR_q} = q$ , we get the same conclusion as in the proof of ITR( $q$ ), for the first two terms in the relevant error decomposition for GTR( $q$ ) according to (36). It suffices to show the order of  $(\widehat{\Gamma}_{q,\alpha}^g - \Gamma_{q,\alpha}^g)(T^*T)^\mu m_\mu$ , where  $\Gamma_{q,\alpha}^g = U_{q,\alpha}^g(T^*T)T^*T$  and  $\widehat{\Gamma}_{q,\alpha}^g = U_{q,\alpha}^g(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$ . From

$$\lambda U_{q,\alpha}^g(\lambda) = 1 - \alpha^q (\alpha^q + \lambda^q)^{-1},$$

a straightforward calculation gives

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_{q,\alpha}^g - \Gamma_{q,\alpha}^g &= -\alpha^q [\widehat{V}_{q,\alpha} - V_{q,\alpha}] = \alpha^q \widehat{V}_{q,\alpha} [(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^q - (T^*T)^q] V_{q,\alpha} \\ &= \alpha^q \widehat{V}_{q,\alpha} \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n [(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{q-1} - (T^*T)^{q-1}] V_{q,\alpha} + \alpha^q \widehat{V}_{q,\alpha} (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n - T^*T) (T^*T)^{q-1} V_{q,\alpha}, \end{aligned}$$

where  $\widehat{V}_{q,\alpha} = [\alpha^q I + (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^q]^{-1}$  and  $V_{q,\alpha} = [\alpha^q I + (T^*T)^q]^{-1}$ . If we multiply and divide simultaneously the first term of  $\widehat{\Gamma}_{q,\alpha}^g - \Gamma_{q,\alpha}^g$  by both  $\widehat{V}_{q-1,\alpha}$  and  $V_{q-1,\alpha}$ , and the second term, both by  $\widehat{V}_{1,\alpha}$  and  $V_{1,\alpha}$ , we get

$$\begin{aligned} (\widehat{\Gamma}_{q,\alpha}^g - \Gamma_{q,\alpha}^g)(T^*T)^\mu &= \widehat{V}_{q,\alpha} \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n \widehat{V}_{q-1,\alpha}^{-1} \left\{ \alpha^{q-1} \widehat{V}_{q-1,\alpha} [(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{q-1} - (T^*T)^{q-1}] V_{q-1,\alpha} (T^*T)^\mu \right\} \alpha V_{q-1,\alpha}^{-1} V_{q,\alpha} \\ &\quad + \alpha^{q-1} \widehat{V}_{q,\alpha} \widehat{V}_{1,\alpha}^{-1} \left\{ \alpha \widehat{V}_{1,\alpha} (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n - T^*T) V_{1,\alpha} (T^*T)^\mu \right\} V_{1,\alpha}^{-1} (T^*T)^{q-1} V_{q,\alpha} \\ &= D_{1,q} [(\widehat{\Gamma}_{q-1,\alpha}^g - \Gamma_{q-1,\alpha}^g)(T^*T)^\mu] D_{2,q} + D_{3,q} [(\widehat{\Gamma}_{1,\alpha}^g - \Gamma_{1,\alpha}^g)(T^*T)^\mu] D_{4,q}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} D_{1,q} &= [\alpha^q I + (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^q]^{-1} [\alpha^{q-1} \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n + (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^q], \\ D_{2,q} &= [\alpha^q I + (T^*T)^q]^{-1} [\alpha^q I + \alpha (T^*T)^{q-1}], \\ D_{3,q} &= [\alpha^q I + (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^q]^{-1} [\alpha^q I + \alpha^{q-1} \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n], \\ D_{4,q} &= [\alpha^q I + (T^*T)^q]^{-1} [\alpha (T^*T)^{q-1} + (T^*T)^q]. \end{aligned}$$

We claim that,  $D_{(p,q)}^* \equiv [\alpha^q I + (T^*T)^q]^{-1} \alpha^p (T^*T)^{q-p}$  is bounded, for any  $p$  and  $q$  such that  $q \geq p \geq 0$ .

To see this, we only need to observe that

$$\begin{aligned} D_{(p,q)}^* &= \alpha^{-(q-p)} \{ \alpha^q [\alpha^q I + (T^*T)^q]^{-1} \} (T^*T)^{q-p} \\ &= \alpha^{-(q-p)} \{ [I - U_{q,\alpha}^g(T^*T)T^*T] (T^*T)^{q-p} \} \\ &\leq C, \end{aligned}$$

where the last inequality follows by Lemma 3.3(i). For the same reason,  $\widehat{D}_{(p,q)}^* \equiv [\alpha^q I + (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^q]^{-1} \alpha^p (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^{q-p}$  is bounded uniformly in  $n$ . Consequently, each  $D_{i,q}$  (for  $i = 1, \dots, 4$ ), which is a linear combination of  $D_{(p,q)}^*$ 's or  $\widehat{D}_{(p,q)}^*$ 's, is also bounded, implying

$$\|\Delta_q^g m_\mu\| \equiv \|(\widehat{\Gamma}_{q,\alpha}^g - \Gamma_{q,\alpha}^g)(T^*T)^\mu m_\mu\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq C_1 \|\Delta_{q-1}^g m_\mu\|_{L^2(\mathcal{X})} + C_2 \|\Delta_1^g m_\mu\|_{L^2(\mathcal{X})},$$

which, by backward induction, leads to

$$\|(\widehat{\Gamma}_{q,\alpha}^g - \Gamma_{q,\alpha}^g)(T^*T)^\mu m_\mu\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq C \|(\widehat{\Gamma}_{1,\alpha}^g - \Gamma_{1,\alpha}^g)(T^*T)^\mu m_\mu\|_{L^2(\mathcal{X})}, \text{ for } q \text{ finite.}$$

This completes the proof, since GTR of order one is equivalent to OTR, i.e.,  $\widehat{\Gamma}_{1,\alpha}^g - \Gamma_{1,\alpha}^g = \widehat{\Gamma}_{1,\alpha} - \Gamma_{1,\alpha}$ .

■

**Proof of Theorem 4.4** With C.3.1 satisfied by  $U_\alpha^s(\cdot)$ , the first term of (36) is analyzed in the same as above. Due to the infinite qualification of Showalter's method, the pure regularization bias is of order  $O(\alpha^\mu)$ , for any  $\mu > 0$ . Let  $\Gamma_\alpha^s = U_\alpha^s(\cdot)(T^*T)T^*T$  and  $\widehat{\Gamma}_\alpha^s = U_\alpha^s(\cdot)(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$ . Using  $\lambda U_\alpha^s(\cdot)(\lambda) = 1 - \exp(-\lambda/\alpha)$ , and  $\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ , we obtain, by spectral calculus,

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_\alpha^s - \Gamma_\alpha^s &= -[\exp(-\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n/\alpha) - \exp(-T^*T/\alpha)] \\ &= \exp(-\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n/\alpha) [\exp(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n/\alpha) - \exp(T^*T/\alpha)] \exp(-T^*T/\alpha) \\ &= \exp(-\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n/\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (1/\alpha)^j [(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^j - (T^*T)^j] \exp(-T^*T/\alpha) \\ &= \exp(-\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n/\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (1/\alpha)^j [(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^j - (T^*T)^j] \exp(-T^*T/\alpha), \end{aligned}$$

since  $(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^0 = (T^*T)^0 = I$ . From the identity

$$(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^j - (T^*T)^j = \sum_{k=0}^{j-1} (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^k (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n - T^*T) (T^*T)^{j-1-k},$$

follows

$$\begin{aligned} &(\widehat{\Gamma}_\alpha^s - \Gamma_\alpha^s)(T^*T)^\mu \\ &= \exp(-\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n/\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (1/\alpha)^j \sum_{k=0}^{j-1} (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^k (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n - T^*T) (T^*T)^{j-1-k} \exp(-T^*T/\alpha) (T^*T)^\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (1/\alpha)^j \sum_{k=0}^{j-1} \exp(-\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n/\alpha) (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^k \widehat{T}_n^* (\widehat{T}_n - T) (T^*T)^{j-1-k} \exp(-T^*T/\alpha) (T^*T)^\mu \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (1/\alpha)^j \sum_{k=0}^{j-1} \exp(-\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n/\alpha) (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^k (\widehat{T}_n^* - T^*) T (T^*T)^{j-1-k} \exp(-T^*T/\alpha) (T^*T)^\mu. \end{aligned}$$

Applying a similar argument used in Lemma 3.3, we can calculate the bound of each term in the above infinite sum. For example,

$$\begin{aligned} & \|T(T^*T)^{j-1-k} \exp(-T^*T/\alpha)(T^*T)^\mu\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} \\ & \leq \sup_{0 < \lambda \leq \bar{\lambda}} |\exp(-\lambda/\alpha) \lambda^{j-1/2-k+\mu}| \leq C \alpha^{j-1/2-k+\mu}, \end{aligned}$$

and likewise,

$$\|\exp(-\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n / \alpha) (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)^k \widehat{T}_n^*\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})} \leq C \alpha^{k+1/2}.$$

Hence, by the triangle inequality, the asymptotic order of the last term in (36) is given by

$$\begin{aligned} & \|(\widehat{\Gamma}_\alpha^s - \Gamma_\alpha^s)(T^*T)^\mu\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} \\ & \leq C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (1/\alpha)^j \sum_{k=0}^{j-1} [\alpha^{k+1/2} \alpha^{j-1-k+\mu} \|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} + \alpha^k \alpha^{j-1/2-k+\mu} \|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}] \\ & = C \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} j \right) \alpha^{\mu-1/2} [\|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} + \|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}] \\ & = C' \alpha^{\mu-1/2} [\|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})} + \|\widehat{T}_n^* - T^*\|_{L^2(\mathcal{W}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})}], \end{aligned}$$

where we used  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} 2^j = e^2 < \infty$ . ■

## A.4 Section 5

### Proof of Theorem 5.1

Step I (a matrix form of  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$ ): Let  $\widehat{g}_{XX}(\cdot, \cdot)$  be the kernel of the self-adjoint operator  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})$ , i.e.,

$$\widehat{g}_{XX}(x, u) = \int_{\mathcal{W}} \widehat{f}_{X,W}(x, w) \widehat{f}_{X,W}(u, w) dw.$$

By a straightforward calculation,  $\widehat{g}_{XX}(\cdot, \cdot)$  is written, in a matrix form, as

$$\widehat{g}_{XX}(x, u) = n^{-2} K_n^X(x)' M_W K_n^X(u).$$

Plugging in  $\widehat{g}_{XX}(\cdot, \cdot)$  into the operator  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$  yields

$$\begin{aligned} (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n m)(x) & = \int \widehat{g}_{XX}(x, u) m(u) du = n^{-2} K_n^X(x)' M_W \int_{\mathcal{X}} K_n^X(u) m(u) du \\ & = n^{-2} K_n^X(x)' M_W \langle K_n^X(\cdot), m(\cdot) \rangle_{L^2(\mathcal{X})}. \end{aligned} \tag{37}$$

Step II (the spectral representation of  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$ ): Let  $\{(\lambda_s, e_s)\}_{s=1}^{n'}$  denote all the nonzero eigenvalues and the corresponding eigenvectors of  $Q_{X,W} = n^{-2} M_W^{1/2} M_X M_W^{1/2}$ , where  $n' = \text{rank}(Q_{X,W}) \leq n$ . Define

$$v_s(x) = K_n^X(x)' M_W^{1/2} e_s. \quad (38)$$

We claim that the spectral representation of the compact self-adjoint operator  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$  is given by

$$\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n = \sum_{s=1}^{n'} \lambda_s P_{v_s},$$

where  $P_{v_s}$  denotes the orthogonal projection on the subspace generated by the function  $v_s$ . To prove the claim, it suffices to show that all the nonzero eigenvalues and the corresponding eigenfunctions of  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$  are given by  $\{(\lambda_s, v_s)\}_{s=1}^{n'}$ . From the definition of  $(\lambda_s, e_s)$ , it follows that

$$\begin{aligned} (\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n v_s)(x) &= n^{-2} K_n^X(x)' M_W \langle K_n^X, v_s \rangle_{L^2(\mathcal{X})} \\ &= n^{-2} K_n^X(x)' M_W \langle K_n^X, K_n^{X'} \rangle_{L^2(\mathcal{X})} M_W^{1/2} e_s \\ &= K_n^X(x)' M_W^{1/2} (n^{-2} M_W^{1/2} M_X M_W^{1/2}) e_s \\ &= K_n^X(x)' M_W^{1/2} (\lambda_s e_s) = \lambda_s v_s, \end{aligned}$$

implying that  $\{(\lambda_s, v_s)\}_{s=1}^{n'}$  is a subset of the eigensystem of  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$  corresponding to the nonzero eigenvalues. From  $\dim(\mathcal{R}(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)) = \min[\dim(\text{lin}\{K_n^X(\cdot)\}), \dim(\text{lin}\{K_n^W(\cdot)\})] = \text{rank}(Q_{X,W})$ , the number of nonzero eigenvalues of  $\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n$  is equal to  $n'$ , completing the proof for the claim.

Step III (the spectral representation of  $r(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)$ ): From the theorem on spectral calculus-see, Taylor and Lay (1980, p.368, for example), we obtain the spectral representation of  $r(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)$

$$r(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)(\cdot) = \sum_{s=1}^{n'} r(\lambda_s) P_{v_s}(\cdot) = \sum_{s=1}^{n'} r(\lambda_s) v_s (\langle v_s, v_s \rangle_{L^2(\mathcal{X})})^{-1} \langle v_s, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{X})}.$$

By plugging in (38) into the above equation,

$$\begin{aligned} & [r(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) m](x) \\ &= \sum_{s=1}^{n'} r(\lambda_s) K_n^X(x)' M_W^{1/2} e_s (e_s' M_W^{1/2} M_X M_W^{1/2} e_s)^{-1} e_s' M_W^{1/2} \langle K_n^X, m \rangle_{L^2(\mathcal{X})}, \end{aligned}$$

which, by definition of  $e_s$ , reduces to

$$n^{-2} K_n^X(x)' M_W^{1/2} \left[ \sum_{s=1}^{n'} r(\lambda_s) \lambda_s^{-1} P_{e_s} \right] M_W^{1/2} \langle K_n^X, m \rangle_{L^2(\mathcal{X})}$$

$$= n^{-2} K_n^X(x)' M_W^{1/2} r(Q_{X,W}) Q_{X,W}^{-1} M_W^{1/2} < K_n^X, m >_{L^2(\mathcal{X})}.$$

Step IV (Closed form of  $R_n^\alpha(\widehat{h}_n)$ ): From  $\widehat{h}_n(w) = n^{-1} K_n^W(w) \mathbf{y}$ ,

$$\begin{aligned} (\widehat{T}_n^* \widehat{h}_n)(x) &= \int_{\mathcal{W}} \widehat{h}_n(w) \widehat{f}_{X,W}(x, w) dw = n^{-2} K_n^X(x)' \left[ \int_{\mathcal{W}} K_n^W(w) K_n^W(w)' dw \right] \mathbf{y} \\ &= n^{-2} K_n^X(x)' M_W \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} R_n^\alpha(\widehat{h}_n)(x) &= [U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n) \widehat{T}_n^* \widehat{h}_n](x) \\ &= n^{-2} K_n^X(x)' M_W^{1/2} U_\alpha(Q_{X,W}) Q_{X,W}^{-1} M_W^{1/2} < K_n^X(\cdot), n^{-2} K_n^X(\cdot)' M_W >_{L^2(\mathcal{X})} \mathbf{y} \\ &= n^{-2} K_n^X(x)' M_W^{1/2} U_\alpha(Q_{X,W}) M_W^{1/2} \mathbf{y}. \end{aligned}$$

■

### Proof of Theorem 5.2

Given the common element fixed to be  $w_1 \in \mathcal{W}_1$ , we define  $\widehat{T}_{w_1, n} : L_{w_1}^2(\mathcal{Z}) \rightarrow L_{w_1}^2(\mathcal{W}_2)$  by

$$\widehat{T}_{w_1, n}(m)(w_2) = \int_{\mathcal{Z}} m(u, w_1) \widehat{f}_{Z, W_1, W_2}(u, w_1, w_2) du,$$

and likewise,  $\widehat{T}_{w_1, n}^* : L_{w_1}^2(\mathcal{W}_2) \rightarrow L_{w_1}^2(\mathcal{Z})$  by  $\widehat{T}_{w_1, n}^*(h)(z) = \int_{\mathcal{W}_2} h(w_1, w_2) \widehat{f}_{Z, W_1, W_2}(z, w_1, w_2) dw_2$ , where  $L_{w_1}^2(\mathcal{Z}) = \{m(\cdot, w_1) \in L^2(\mathcal{Z})\}$  and  $L_{w_1}^2(\mathcal{W}_2) = \{h(w_1, \cdot) \in L^2(\mathcal{W}_2)\}$ . Note that the kernel of the self-adjoint operator  $\widehat{T}_{w_1, n}^* \widehat{T}_{w_1, n} : L_{w_1}^2(\mathcal{Z}) \rightarrow L_{w_1}^2(\mathcal{Z})$  is given by

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{ZZ}(u, z; w_1) &= \int_{\mathcal{W}_2} \widehat{f}_{Z, W_1, W_2}(u, w_1, w_2) \widehat{f}_{Z, W_1, W_2}(z, w_1, w_2) dw_2 \\ &= n^{-2} K_n^X(u, w_1)' M_{W_2} K_n^X(z, w_1), \end{aligned}$$

yielding

$$\begin{aligned} (\widehat{T}_{w_1, n}^* \widehat{T}_{w_1, n} m)(z) &= \int_{\mathcal{Z}} \widehat{g}_{ZZ}(u, z; w_1) m(u, w_1) du \\ &= n^{-2} K_n^X(z, w_1)' M_{W_2} < K_n^X(\cdot, w_1), m(\cdot, w_1) >_{L^2(\mathcal{Z})}. \end{aligned}$$

Let  $\{(\lambda_{w_1, s}, e_{w_1, s})\}_{s=1}^n$  be the nonzero eigenvalues and the corresponding eigenvectors of  $Q_{Z, W}(w_1)$ .

From a similar argument to Step II in the proof of Theorem 5.1, we obtain the spectral representation of  $\widehat{T}_{w_1, n}^* \widehat{T}_{w_1, n}$ , which is given by

$$\widehat{T}_{w_1, n}^* \widehat{T}_{w_1, n} = \sum_{s=1}^{n'} \lambda_{w_1, s} P_{v_{w_1, s}},$$

where  $P_{v_{w_1,s}}$  is the orthogonal projection on the eigenspace generated by the eigenfunction  $v_{w_1,s}(z) = n^{-1}K_n^X(z, w_1)'M_{W_2}^{1/2}e_{w_1,s}$ . Applying spectral calculus, we have that, for  $m(\cdot, w_1) \in L^2_{w_1}(\mathcal{Z})$ ,

$$\begin{aligned} & [r(\widehat{T}_{w_1,n}^* \widehat{T}_{w_1,n})m](z) \\ &= \sum_{s=1}^n r(\lambda_{w_1,s})P_{v_{w_1,s}}(m)(z) \\ &= n^{-2}K_n^X(z, w_1)'M_{W_2}^{1/2}r(Q_{Z,W}(w_1))Q_{Z,W}^{-1}(w_1)M_{W_2}^{1/2} \langle K_n^X(\cdot, w_1), m(\cdot, w_1) \rangle_{L^2(\mathcal{Z})}. \end{aligned}$$

Observing that

$$\begin{aligned} (\widehat{T}_{w_1,n}^* \widehat{h}_n)(z) &= \int_{\mathcal{W}_2} \widehat{f}_{Z,W_1,W_2}(z, w_1, w_2) \widehat{h}_n(w_1, w_2) dw_2 \\ &= n^{-2} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} K_h(Z_i - z) K_h(W_{1i} - w_1) M_{ij}^{W_2} K_h(W_{1j} - w_1) y_j \\ &= n^{-2} K_n^X(z, w_1)' M_{W_2} [K_n^{W_1}(w_1) \odot \mathbf{y}], \end{aligned}$$

we now get

$$\begin{aligned} & \widehat{m}_{\alpha,n}(z, w_1) \\ &= [U_\alpha(\widehat{T}_n^* \widehat{T}_n)(\widehat{T}_n^* \widehat{h}_n)](z, w_1) \\ &= U_\alpha(\widehat{T}_{w_1,n}^* \widehat{T}_{w_1,n})(\widehat{T}_{w_1,n}^* \widehat{h}_n)(z) \\ &= n^{-2} K_n^X(z, w_1)' M_{W_2}^{1/2} U_\alpha(Q_{Z,W}(w_1)) Q_{Z,W}^{-1}(w_1) M_{W_2}^{1/2} \langle K_n^X(\cdot, w_1), (\widehat{T}_{w_1,n}^* \widehat{h}_n)(\cdot) \rangle_{L^2(\mathcal{Z})} \\ &= n^{-2} K_n^X(z, w_1)' M_{W_2}^{1/2} U_\alpha(Q_{Z,W}(w_1)) M_{W_2}^{1/2} [K_n^{W_1}(w_1) \odot \mathbf{y}]. \end{aligned}$$

■

**Proof of Proposition 5.3** With  $a * b$  denoting convolution of  $a$  and  $b$ , we define

$$m_{c(g_1)}(z, w_1) \equiv (K_{g_1} * m)(z, w_1) = \int K_{g_1}(z - s) m(s, w_1) ds, \quad (39)$$

and

$$\begin{aligned} f_{Z,W}^{c(g)}(z, w) &\equiv (K_{(g_1, g_2)} * f_{Z,W})(z, w) = \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{Z}} K_{g_1}(s_1 - z) K_{g_2}(s_2 - w) f_{Z,W}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \\ &= \mathbb{E}[K_{g_1}(Z_i - z) K_{g_2}(W_i - w)]. \end{aligned}$$

By adding and subtracting  $\int f_{Z,W}^{c(g)}(z, w)m(z, w_1)dz$ , the estimation errors of  $\widehat{T}_n$  are decomposed into

$$\begin{aligned} & (\widehat{T}_n m - Tm)(w) \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \int [K_{g_1}(Z_i - z)K_{g_2}(W_i - w) - f_{Z,W}^{c(g)}(z, w)]m(z, w_1)dz \\ & \quad + \int [f_{Z,W}^{c(g)}(z, w) - f_{Z,W}(z, w)]m(z, w_1)dz \\ & \equiv s_n(w) + B_n(w), \end{aligned}$$

from which we obtain the MISE of  $\widehat{T}_n m$ , given by

$$\mathbb{E} \int_{\mathcal{W}} [(\widehat{T}_n - T)m]^2(w)dw = \int_{\mathcal{W}} \{\text{Var}[s_n(w)] + \mathbb{E}^2[B_n(w)]\} dw.$$

Noting that

$$s_n(w) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \{K_{g_2}(W_i - w)m_{c(g_1)}(Z_i, w_1) - \mathbb{E}[K_{g_2}(W_i - w)m_{c(g_1)}(Z_i, w_1)]\},$$

the standard calculation of the variance term (under the i.i.d. assumption in C.5.1) yields

$$\begin{aligned} \text{Var}[s_n(w)] &= n^{-1} \text{Var}[K_{g_2}(W_i - w)m_{c(g_1)}(Z_i, w_1)] \\ &= n^{-1} g_2^{-d_2} \int_{\mathcal{Z}} m_{c(g_1)}^2(z, w_1) \left[ \int_{\mathcal{W}} K^2(u) f_{Z,W}(z, w + g_2 u) du \right] dz + O(n^{-1}), \end{aligned}$$

implying that

$$\int_{\mathcal{W}} \text{Var}[s_n(w)] dw \leq \frac{C}{ng_2^{d_2}} \|K\|_2^2 \|m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2,$$

where the last inequality is due to the dominated convergence theorem and boundedness of  $f_{Z,W}(\cdot)$  in C.5.3. To calculate the bias term, we observe that, by Cauchy-Schwartz inequality,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}} B_n^2(w)dw &= \int_{\mathcal{W}} \left[ \int_{\mathcal{Z}} \{f_{Z,W}^c(z, w) - f_{Z,W}(z, w)\} m(z, w_1) dz \right]^2 dw \\ &\leq \|f_{Z,W}^c - f_{Z,W}\|_{L^2(\mathcal{Z} \times \mathcal{W})}^2 \|m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2, \end{aligned}$$

leading to

$$\mathbb{E} \int_{\mathcal{W}} [(\widehat{T}_n m - Tm)(w)]^2 dw \leq \|m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 (\|f_{Z,W}^c - f_{Z,W}\|_{L^2(\mathcal{Z} \times \mathcal{W})}^2 + \frac{C}{ng_2^{d_2}} \|K\|_2^2),$$

i.e.,

$$\mathbb{E} \|\widehat{T}_n - T\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})}^2 = \sup_{m(\neq 0) \in L^2(\mathcal{X})} \frac{\mathbb{E} \int_{\mathcal{W}} [(\widehat{T}_n - T)m]^2(w)dw}{\|m\|_{L^2(\mathcal{X})}^2} \leq \|f_{Z,W}^c - f_{Z,W}\|_{L^2(\mathcal{Z} \times \mathcal{W})}^2 + \frac{C}{ng_2^{d_2}} \|K\|_2^2.$$

Under C.5.2 (i.e.,  $\int |K(s)|ds < \infty$  and  $\sup |K(s)| < \infty$ ), the convolution error ( $\|f_{Z,W}^c - f_{Z,W}\|_{L^2(\mathcal{Z} \times \mathcal{W})}^2$ ) converges to zero, as  $g_1$  and  $g_2$  go to zero, for any square integrable  $f_{Z,W}(\cdot, \cdot)$ . This, together with the bandwidth condition,  $ng_2^{d_2} \rightarrow 0$ , gives rise to uniform consistency of  $\widehat{T}_n$ , proving part (i). When there exist  $p_0$ -th partial derivatives of  $f_{Z,W}(\cdot, \cdot)$  that are continuous and square integrable-i.e., C.5.4 holds, we have, by application of the standard Taylor expansion, that

$$\mathbb{E}\|(\widehat{T}_n - T)m\|_{L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{W})}^2 = O(g_1^{2p_0} + g_2^{2p_0}) + O\left(\frac{1}{ng_2^{d_2}}\right).$$

By symmetry of the above arguments, we also get the convergence rate of  $\widehat{T}_n^*$ .

It remains to prove part (iii). Let  $r(Z_i, W_{1i}) = m(Z_i, W_{1i}) - m_{c(g_1)}(Z_i, w_1)$ , where  $m_{c(g_1)}(\cdot, \cdot)$  is defined by (39). From  $(\widehat{T}_n m_0)(w) = n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{g_2}(W_i - w)m_{c(g_1)}(Z_i, w_1)$ , we get

$$\begin{aligned} & (\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0)(w) \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{g_2}(W_i - w)\varepsilon_i + n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{g_2}(W_i - w)r(Z_i, W_{1i}) \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{g_2}(W_i - w)\varepsilon_i + n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{g_2}(W_i - w)(\nu_i - \nu_i^c) + n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{g_2}(W_i - w)\mathbb{E}(r(Z_i, W_{1i})|W_i) \\ &\equiv s_{1,n}(w) + s_{2,n}(w) + B_n(w), \end{aligned}$$

where  $\nu_i = m(Z_i, W_{1i}) - \mathbb{E}(m(Z_i, W_{1i})|W_i)$ , and  $\nu_i^c = m_{c(g_1)}(Z_i, w_1) - \mathbb{E}(m_{c(g_1)}(Z_i, w_1)|W_i)$ . As a consequence,

$$\mathbb{E} \int_{\mathcal{W}} (\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0)^2(w)dw = \int_{\mathcal{W}} \{\text{Var}[s_{1,n}(w) + s_{2,n}(w)] + \mathbb{E}^2[B_n(w)]\} dw.$$

By the standard argument in kernel regression, the variance of the main stochastic term is calculated in a straightforward way;

$$\text{Var}[s_{1,n}(w)] = \frac{1}{ng_2^{d_2}} \|K\|_2^2 \mathbb{E}(\varepsilon_i^2 | W_i = w) f_W(w) (1 + o(1)),$$

leading to

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}} \text{Var}[s_{1,n}(w)] dw &= \frac{1}{ng_2^{d_2}} \|K\|_2^2 \left[ \int_{\mathcal{W}} \mathbb{E}(\varepsilon_i^2 | W_i = w) f_W(w) dw \right] (1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{ng_2^{d_2}} \|K\|_2^2 \sigma_\varepsilon^2 (1 + o(1)) = O\left(\frac{1}{ng_2^{d_2}}\right), \end{aligned}$$

where  $\sigma_\varepsilon^2 = \mathbb{E}(\varepsilon_i^2)$ . From  $\mathbb{E}[\nu_i | W_i] = \mathbb{E}[\nu_i^c | W_i] = 0$ , it follows that

$$\mathbb{E}[(\nu_i - \nu_i^c)^2 | W_i] = \text{Var}[r(Z_i, W_{1i}) | W_i] \leq \mathbb{E}[r^2(Z_i, W_{1i}) | W_i],$$

implying, by the iid assumption and the law of iterated expectation, that

$$\begin{aligned}
\text{Var} [s_{2,n}(w)] &= n^{-1} \mathbb{E}\{[K_{g_2}(W_i - w)(\nu_i - \nu_i^c)]^2\} \leq n^{-1} \mathbb{E}\{[K_{g_2}(W_i - w)]^2 \mathbb{E}[r^2(Z_i, W_{1i})|W_i]\} \\
&= n^{-1} \mathbb{E}\{[K_{g_2}(W_i - w)r(Z_i, W_{1i})]^2\} \\
&= \frac{1}{ng_2^{d_2}} \|K\|_2^2 \int_{\mathcal{Z}} r^2(z, w_1) f_{Z,W}(z, w) dz (1 + o(1)).
\end{aligned}$$

From boundedness of  $f_{Z,W}(\cdot, \cdot)$ ,

$$\int_{\mathcal{W}} \text{Var} [s_{2,n}(w)] dw \leq \frac{C}{ng_2^{d_2}} \|K\|_2^2 \|m(\cdot, \cdot) - m_{c(g_1)}(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{X})}^2 = o\left(\frac{1}{ng_2^{d_2}}\right),$$

since the convolution error,  $\|m(\cdot, \cdot) - m_{c(g_1)}(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{X})}$ , converges to zero, as  $g_1 \rightarrow 0$ . To calculate the bias term, we note, by the dominated convergence theorem, that

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_n(w)] &= \mathbb{E}[K_{g_2}(W_i - w)r(Z_i, W_{1i})] \\
&= \int_{\mathcal{Z}} [m(z, w_1) - m_{c(g_1)}(z, w_1)] f_{Z,W}(z, w) dz (1 + o(1)).
\end{aligned} \tag{40}$$

Letting  $f_{Z,W}^{c(g_1)}(u, w) = \int_{\mathcal{Z}} K_{g_1}(z - u) f_{Z,W}(z, w) dz$ , we obtain an alternative form of the bias such that

$$\mathbb{E}[B_n(w)] = \left\{ \int_{\mathcal{Z}} [f_{Z,W}(u, w) - f_{Z,W}^{c(g_1)}(u, w)] m(u, w_1) du \right\} (1 + o(1)), \tag{41}$$

since  $\int_{\mathcal{Z}} m_{c(g_1)}(z, w_1) f_{Z,W}(z, w) dz = \int_{\mathcal{Z}} f_{Z,W}^{c(g_1)}(u, w) m(u, w_1) du$ , by Fubini's Theorem. By Cauchy-Schwartz inequality, it follows from (40) and (41), together with square-integrability of  $f_{Z,W}(\cdot, \cdot)$  and  $m(\cdot, \cdot)$ , that

$$\int_{\mathcal{W}} \mathbb{E}^2 [B_n(w)] dw \leq C \min\{\|m(\cdot, \cdot) - m_{c(g_1)}(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{X})}^2, \|f_{Z,W}(\cdot, \cdot) - f_{Z,W}^{c(g_1)}(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{Z} \times \mathcal{W})}^2\},$$

which, by the standard method of Taylor expansion (under C.5.4 ) gives

$$\int_{\mathcal{W}} \mathbb{E}^2 [B_n(w)] dw = O(g_1^{\max\{2p_0, 2p_1\}}).$$

Letting  $\bar{p} = \max(p_0, p_1)$ , we finally get

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \int_{\mathcal{W}} (\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0)^2(w) dw &= \int_{\mathcal{W}} \{\text{Var} [s_{1,n}(w) + s_{2,n}(w)] + \mathbb{E}^2 [B_n(w)]\} dw \\
&= O\left(\frac{1}{ng_2^{d_2}}\right) + O(g_1^{2\bar{p}}),
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{ng_2^{d_2}}} + g_1^{\bar{p}}\right).$$

■

**Proof of Theorem 5.4** Under C.5.1 through C.5.4, all the conditions of Theorem 3.2 follow from Proposition 5.3.(i) and (iii), proving the consistency result for  $\widehat{m}_{\alpha,n}$ . Also, Proposition 5.3.(ii) and (iii) applied to Corollary 3.4.(i), leads to, for  $m_0 \in \mathcal{M}_{1/2,\rho}$ ,

$$\begin{aligned} \|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} &\leq O_p\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\frac{1}{\sqrt{ng_2^{d_2}}} + g_1^{\bar{p}}\right]\right) + O_p(\sqrt{\alpha}) + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{ng_1^{d_1}}} + g_1^{p_0} + g_2^{p_0}\right) \\ &= O_p\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\frac{1}{\sqrt{ng_2^{d_2}}} + g_1^{p_0}\right]\right) + O_p(\sqrt{\alpha}) + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{ng_1^{d_1}}} + g_2^{p_0}\right), \end{aligned}$$

since  $g_1^{p_0} = o(g_1^{\bar{p}}/\sqrt{\alpha})$ , from  $\alpha_n = o(1)$  and  $\bar{p} = p_0 = p_1$ , by assumption. In a similar way, Proposition 5.3 and Corollary 3.4.(ii) yield, for  $m_0 \in \mathcal{M}_{1,\rho}$ ,

$$\begin{aligned} \|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} &\leq O_p\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\frac{1}{\sqrt{ng_2^{d_2}}} + g_1^{\bar{p}}\right]\right) + O_p(\alpha) + O_p\left(\sqrt{\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{ng_2^{d_2}}} + g_1^{p_0} + g_2^{p_0}\right]\right) \\ &\quad + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{ng_1^{d_1}}} + g_1^{p_0} + g_2^{p_0}\right) \\ &= O_p\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\frac{1}{\sqrt{ng_2^{d_2}}} + g_1^{p_0}\right]\right) + O_p(\alpha) + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{ng_1^{d_1}}} + g_2^{p_0}\right), \end{aligned}$$

since  $\sqrt{\alpha}[1/\sqrt{ng_2^{d_2}} + g_1^{p_0} + g_2^{p_0}] = o(1/\sqrt{n\alpha g_2^{d_2}}) + o(g_1^{p_0} + g_2^{p_0})$ . ■

**Proof of Theorem 5.5** We only give a proof for part(ii), since part (i) is shown in the same way. We first show that, under the given side condition, the profile of quasi-optimal smoothing parameters are given by  $\{(g_1, g_2, \alpha^*)\}$  with  $\alpha^* = [\max(1/\sqrt{ng_2^{d_2}}, g_1^{p_0})]^{2/3}$ . When the regularization parameter is fixed by  $\alpha^* = [\max(1/\sqrt{ng_2^{d_2}}, g_1^{p_0})]^{2/3}$ , it follows from the given side condition that  $(1/\sqrt{ng_1^{d_1}} + g_2^{p_0}) \leq O(\max\{g_1^{2p_0/3}, [ng_2^{d_2}]^{-1/3}\}) = O(\alpha^*)$ . Consequently, the lower bounds in Theorem 5.4.(ii), corresponding to  $m_0 \in \mathcal{M}_{1,\rho}$ , reduces to

$$\|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq O_p\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^*}}[1/\sqrt{ng_2^{d_2}} + g_1^{p_0}]\right) + O_p(\alpha^*) = O_p([\max(1/\sqrt{ng_2^{d_2}}, g_1^{p_0})]^{2/3}).$$

Since  $\|\widehat{h}_{0,n} - \widehat{T}_n m_0\|_{L^2(\mathcal{W})} \equiv O_p(\delta_n) = O_p(\max\{1/\sqrt{ng_2^{d_2}}, g_1^{p_0}\})$ , from Proposition 5.3, it also holds by Theorem 3.5 that

$$O_p([\max(1/\sqrt{ng_2^{d_2}}, g_1^{p_0})]^{2/3}) = O_p(\delta_n^{2/3}) \leq \|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})},$$

implying that the actual convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$ , given by  $O_p([\max(1/\sqrt{ng_2^{d_2}}, g_1^{p_0})]^{2/3})$ , is quasi-optimal for  $m_0 \in \mathcal{M}_{1,p}$ . This confirms the quasi-optimality of  $\{(g_1, g_2, \alpha^*)\}$ . It is not difficult to show suboptimality of regularization parameters other than  $\alpha^* = [\max(1/\sqrt{ng_2^{d_2}}, g_1^{p_0})]^{2/3}$ . For example, when the regularization parameter is of greater order than  $\alpha^*$ , the convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$  is determined, under the side condition, by the dominant term  $O_p(\alpha)$  which is greater than  $O_p(\delta_n^{2/3})$ . We next decide on the fastest possible rate of convergence, out of the quasi-optimal profile  $\{(g_1, g_2, \alpha^*)\}$ . From  $\|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} = O_p([\max(1/\sqrt{ng_2^{d_2}}, g_1^{p_0})]^{2/3})$ , it is possible to improve the convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$  by making  $g_2$  larger and  $g_1$  smaller, as long as they satisfy the side condition. Obviously, the most favorable choice of  $(g_1, g_2)$  is the one under which the side condition hold as an equality. That is, the optimal choice of  $(g_1, g_2)$  is given by  $(g_{1n}^*, g_{2n}^*)$  such that  $(ng_{1n}^{*d_1})^{-1/2} \simeq g_{1n}^{*2p_0/3}$  and  $g_{2n}^{*3p_0/2} \simeq (ng_{2n}^{*d_2})^{-1/2}$ , leading to  $g_{1n}^* = C_0 n^{-\frac{1}{(4/3)p_0+d_1}}$ ,  $g_{2n}^* = C_1 n^{-\frac{1}{3p_0+d_2}}$ , and  $\alpha_n^* = C_2 n^{-\frac{p_0}{3p_0+d_2}}$ . Note that all the basic conditions in C.5.5 are satisfied by  $(g_{1n}^*, g_{2n}^*, \alpha_n^*)$ . Since  $g_{1n}^{*p_0} = C_0 n^{-\frac{3p_0}{4p_0+3d_1}}$  is of smaller order than  $1/\sqrt{ng_{2n}^{*d_2}} = O(n^{-\frac{3p_0}{6p_0+2d_2}})$ , by the assumptions of  $d_1/2 \leq p_0$  and  $d_1 \leq d_2$ , we now obtain the optimal convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}$ , given by  $\|\widehat{m}_{\alpha,n} - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} = O_p(n^{-\frac{p_0}{3p_0+d_2}})$ . ■

**Proof of Theorem 5.6** (i) After plugging in the results of Proposition 5.3 into Theorem 4.4, we get

$$\|\widehat{m}_{\alpha,n}^s - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq O_p\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\frac{1}{\sqrt{ng_2^{d_2}}} + g_1^{p_0}\right]\right) + O_p(\alpha^\mu) + O_p(\alpha^{\mu-1/2}\left[\frac{1}{\sqrt{ng_1^{d_1}}} + g_2^{p_0}\right]),$$

from  $p_0 = p_1$  and  $\alpha^{\mu-1/2}(1/\sqrt{ng_2^{d_2}} + g_1^{p_0}) = o(\alpha^\mu)$ , since  $n\alpha g_2^{d_2} \rightarrow \infty$  and  $\alpha \rightarrow 0$ , as  $n \rightarrow \infty$ ; see the assumption in C.5.5(b). Following the same arguments in the proof of Theorem 5.5, we can show that the profile of quasi-optimal smoothing parameters are given by  $\{(g_1, g_2, \alpha^*)\}$  with  $\alpha^* = [\max(1/\sqrt{ng_{2n}^{d_2}}, g_{1n}^{p_0})]^{2/(2\mu+1)}$ , under which the actual convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}^s$  reduces to

$$\|\widehat{m}_{\alpha,n}^s - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} = [\max(1/\sqrt{ng_{2n}^{d_2}}, g_{1n}^{p_0})]^{2\mu/(2\mu+1)}.$$

The fastest possible rate of convergence, among the quasi-optimal ones, is achieved by choosing  $(g_1, g_2) = (g_{1n}^*, g_{2n}^*)$  such that  $(ng_{1n}^{*d_1})^{-1/2} \simeq g_{1n}^{*p_0/(2\mu+1)}$ , and  $g_{2n}^{*p_0(2\mu+1)} \simeq (ng_{2n}^{*d_2})^{-1/2}$ . By letting

$g_{1n}^* = C_0 n^{-\frac{(2\mu+1)}{2p_0+(2\mu+1)d_1}}$ ,  $g_{2n}^* = C_1 n^{-\frac{1}{2(2\mu+1)p_0+d_2}}$ , and  $\alpha_n^* = C_2 n^{-\frac{2p_0}{2(2\mu+1)p_0+d_2}}$ , we obtain the optimal convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}^s$ , given as

$$\|\widehat{m}_{\alpha,n}^s - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} = O_p(n^{-\frac{2\mu p_0}{2(2\mu+1)p_0+d_2}}),$$

since  $g_{1n}^{*p_0} = C_0 n^{-\frac{(2\mu+1)p_0}{2p_0+(2\mu+1)d_1}}$  is of smaller order than  $1/\sqrt{ng_{2n}^{*d_2}} = O(n^{-\frac{(2\mu+1)p_0}{2(2\mu+1)p_0+d_2}})$ , by the assumption that  $d_1/2 \leq p_0$  and  $d_1 \leq d_2$ . All the basic conditions in C.5.5 hold for  $(g_{1n}^*, g_{2n}^*, \alpha_n^*)$ .

(ii) Application of Proposition 5.3 to Theorem 4.1 through Theorem 4.3 gives

$$\|\widehat{m}_{\alpha,n}^q - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} \leq O_p\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\frac{1}{\sqrt{ng_2^{d_2}}} + g_1^{p_0}\right]\right) + O_p(\alpha^{\min(\mu,q)}) + O_p(\alpha^{\min(\mu-1/2,0)}\left[\frac{1}{\sqrt{ng_1^{d_1}}} + g_2^{p_0}\right]),$$

since  $\alpha^{\min(\mu-1/2,1/2)}(1/\sqrt{ng_2^{d_1}} + g_1^{p_0}) = o(1/\sqrt{n\alpha g_2^{d_2}}) + o(g_1^{p_0}/\sqrt{\alpha})$ , and  $\alpha^{\min(\mu-1/2,0)}(g_1^{p_0}) = o(g_1^{p_0}/\sqrt{\alpha})$ . Following the same arguments in the proof of Theorem 5.5, we can show that the profile of quasi-optimal smoothing parameters are given by  $\{(g_1, g_2, \alpha^*)\}$  with  $\alpha^* = [\max(1/\sqrt{ng_{2n}^{d_2}}, g_{1n}^{p_0})]^{2/(2\mu_q+1)}$ , under which the actual convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}^q$  is

$$\|\widehat{m}_{\alpha,n}^q - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} = [\max(1/\sqrt{ng_{2n}^{d_2}}, g_{1n}^{p_0})]^{2\mu_q/(2\mu_q+1)}.$$

The fastest possible rate of convergence, among the quasi-optimal ones, is achieved by choosing  $(g_1, g_2) = (g_{1n}^*, g_{2n}^*)$  such that  $(ng_{1n}^{*d_1})^{-1/2} \simeq g_{1n}^{2\mu_q^\dagger p_0/(2\mu_q+1)}$ , and  $g_{2n}^{p_0(2\mu_q+1)/2\mu_q^\dagger} \simeq (ng_{2n}^{*d_2})^{-1/2}$ . By letting  $g_{1n}^* = C_0 n^{-\frac{(2\mu_q+1)}{4\mu_q^\dagger p_0+(2\mu_q+1)d_1}}$ ,  $g_{2n}^* = C_1 n^{-\frac{2\mu_q^\dagger}{2(2\mu_q+1)p_0+2\mu_q^\dagger d_2}}$ , and  $\alpha_n^* = C_2 n^{-\frac{2p_0}{2(2\mu_q+1)p_0+2\mu_q^\dagger d_2}}$ , we obtain the optimal convergence rate of  $\widehat{m}_{\alpha,n}^q$ , given as

$$\|\widehat{m}_{\alpha,n}^q - m_0\|_{L^2(\mathcal{X})} = O_p(n^{-\frac{2\mu_q p_0}{2(2\mu_q+1)p_0+2\mu_q^\dagger d_2}}),$$

since  $g_{1n}^{*p_0} = C_0 n^{-\frac{(2\mu_q+1)p_0}{4\mu_q^\dagger p_0+(2\mu_q+1)d_1}}$  is of smaller order than  $1/\sqrt{ng_{2n}^{*d_2}} = O(n^{-\frac{(2\mu_q+1)p_0}{2(2\mu_q+1)p_0+2\mu_q^\dagger d_2}})$ , by the assumption that  $d_1/2 \leq p_0$  and  $d_1 \leq d_2$ . ■

## References

- [1] AI, C. AND X. CHEN (2003): “Efficient estimation of models with conditional moment restrictions containing unknown functions,” *Econometrica* 71(6), 1795-1844.

- [2] ALTONJI, J. G. AND R. MATZKIN (2001): “Panel data estimators for nonseparable models with endogenous regressors,” NBER Working Paper No. TO267.
- [3] AMEMIYA, T. (1974): “The nonlinear two-stage least-squares estimator,” *Journal of Econometrics* 2, 105-110.
- [4] BIRMAN, M. AND M. SOLOMJAK (1980): *Quantitative Analysis in Sobolev Imbedding Theorems and Applications to Spectral Theory*. American Math. Soc. Tran., series 2, Vol 114.
- [5] BLUNDELL, R. AND J. L. POWELL (2001a): “Endogeneity in nonparametric and semiparametric regression models,” forthcoming in *Advances in Econometrics, Proceedings of the World Meetings, 2000*, ed. by L. Hansen, North Holland.
- [6] BLUNDELL, R. AND J. L. POWELL (2001b): “Endogeneity in semiparametric binary response models,” Center for Microdata Methods and Practice, Working Paper, 05/01.
- [7] BROWN, D. J. AND R. MATZKIN (1998): “Estimation of nonparametric functions in simultaneous equations models, with an application to consumer demand,” Cowles Foundation Working Paper.
- [8] CHESHER, A. (2002): “Local identification in nonseparable models,” Center for Microdata Methods and Practice, Working Paper, 05/02.
- [9] DAROLLES, S., J-P. FLORENS, AND E. RENAULT (2001): “Nonparametric instrumental regression, Working Paper, GREMAQ, University of Toulouse.
- [10] DAS, M. (1999): “Instrumental variable estimation of models with discrete endogenous regressors, ” presented at 2000 World Congress of the Econometric Society.
- [11] ENGL, H. (1987): “On the choice of the regularization parameter for iterated Tikhonov regularization of ill-posed problems,” *Journal of Approximation Theory* 49, 55-63.
- [12] ENGL, H. AND H. GFRENER (1988): “A posteriori parameter choice for general regularization methods for solving linear ill-posed problems,” *Applied Numerical Mathematics* 4, 395-417.
- [13] ENGLE, H.W., M. HANKE, AND A. NEUBAUER (2000): *Regularization of Inverse Problems*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

- [14] FAN, J. (1991): "Global behavior of deconvolution kernel estimates," *Statistica Sinica* 1, 541-551.
- [15] GROETSCH, C.W. (1993): *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*. Braunschweig: Vieweg.
- [16] GROETSCH, C.W. (1983): "On the Asymptotic Order of Accuracy of Tikhonov Regularization," *Journal of Optimization Theory and Applications* 41, 293-298.
- [17] GROETSCH, C.W. (1977): *Generalized Inverses of Linear Operators: Representation and Approximation*. New York: Dekker.
- [18] HALL P. AND J. L. HOROWITZ (2003): "Nonparametric methods for inference in the presence of instrumental variables," Working Paper, Center for Microdata Methods and Practice.
- [19] HANSEN L. P. (1982): "Large sample properties of generalized method of moments estimators," *Econometrica* 50, 1029-1054.
- [20] HUTSON, V. AND J. S. PYM (1980): *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*. London: Academic Press.
- [21] IMBENS, G. W. AND W. K. NEWEY (2001): "Identification and estimation of triangular simultaneous equations models without additivity, Working Paper.
- [22] IVANOV, V.K., V.V. VASIN, AND V.P. TANANA (1978): *Theory of Linear Ill-Posed Problems*. Moscow: Nauka.
- [23] KING, J.T. AND D. CHILLINGWORTH (1979): "Approximation of generalized inverses by iterated regularization," *Numerical Functional Analyses and Optimizations* 1, 499-513.
- [24] KIRSCH, A. (1996): *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. New York: Springer Verlag.
- [25] KRESS, R. (1989): *Linear Integral Equations*. Berlin: Springer Verlag.
- [26] LINTON, O. B. AND E. MAMMEN (2003): "Estimating semiparametric ARCH( $\infty$ ) models by kernel smoothing methods," Working Paper, LSE.

- [27] MAMMEN, E., O. B. LINTON, AND J. NIELSEN (1999): “The existence and asymptotic properties of a backfitting projection algorithm under weak conditions,” *The Annals of Statistics*, 27(5), 1443-1490.
- [28] NASHED, M.Z. (1976): *Generalized Inverses and Applications*. New York: Academic Press.
- [29] NASHED, M.Z. AND G. WAHBA (1974): “Convergence rates of approximate least squares solutions of linear integral and operator equations of the first kind,” *Mathematics of Computation* 28(125), 69-80.
- [30] NEWEY W. K. AND J. L. POWELL (1988): “Nonparametric instrumental variables estimation,” MIT Working Paper.
- [31] NEWEY W. K. AND J. L. POWELL (2003): “Instrumental variable estimation of nonparametric models,” *Econometrica* 71(5), 1565-1578.
- [32] NEWEY W. K., J. L. POWELL, AND F. VELLA (1999): “Nonparametric estimation of triangular simultaneous equations models,” *Econometrica* 67, 565-603.
- [33] NYCHKA, D. AND D. COX (1989): “Convergence rates for regularized solutions of integral equations from discrete noisy data,” *The Annals of Statistics*, 17(5), 556-572.
- [34] O’SULLIVAN, F. (1986): “Ill-posed inverse problems (with Discussion),” *Statistical Science*, 4, 503-527.
- [35] PHILLIPS, D.L. (1962): “A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind,” *Journal of the Association for Computing Machinery* 9, 84-97.
- [36] PLATO, R. AND G. VAINIKKO (1990): “On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems,” *Numerische Mathematik* 57, 63-79.
- [37] ROEHRIG, C. S. (1988): “Conditions for Identification in Nonparametric and Parametric Models,” *Econometrica*, 55, 875-891.
- [38] SARGANG, J. D. (1958): “The estimation of economic relationships using instrumental variables,” *Econometrica* 26, 393-415.

- [39] SCHOCK, E. (1985): "Approximate solution of ill-posed equations: Arbitrarily slow convergence vs superconvergence, in *Constructive Methods for the Practical Treatment of Integral Equations* (edited by G. Hämmerlin and K.H. Hoffmann), pp. 234-243, Basel: Birkhäuser.
- [40] SHOWALTER D. (1967): "Representation and computation of the pseudoinverse," *Proc. Amer. Math. Soc.* 18, 584-586.
- [41] SILVERMAN, B.W. (1978): "Weak and strong uniform consistency of the kernel estimate of a density and its derivatives," *Annals of Statistics* Vol.6, No.1, 177-184.
- [42] TAUTENHAHN, U. (1998): "Optimality for ill-posed problems under general source conditions," *Numerical Functional Analyses and Optimizations* 19, 377-398.
- [43] THEIL, H. (1953): *Repeated Least Squares Applied to Complete Equation Systems*, The Hague; Central Planning Bureau.
- [44] TIKHONOV, A.N. AND V. ARSENIN (1977): *Solutions of Ill-Posed Problems*. New York: Wiley.
- [45] TIKHONOV, A.N (1963): "Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method," *Soviet Mathematics Doklady* 4, 1035-1038.
- [46] VAINIKKO, G.M. AND A.Y. VERETENNIKOV (1986): *Iteration Procedures in Ill-Posed problems*. 1st Ed. Moscow: Nauka.
- [47] VAN ROOIJ, A.C.M., AND F.H. RUYMGAART (1999): "On inverse estimation," in *Asymptotics, Nonparametrics, and Time Series*, ed. by S. Ghosh. New York: Marcel Dekker, 579-613.

Table 1. MSE (Squared Bias + Variance) of Various Regularized-Kernel Estimates

$\alpha$	$g$	OTR	ITR(2)	GTR(2)	SW
.001	.3	.063 (.012 + .051)	.117 (.020 + .097)	.075 (.024 + .051)	.091 (.023 + .069)
	.4	.049 (.014 + .035)	.096 (.035 + .060)	.058 (.020 + .039)	.075 (.027 + .047)
	.5	.039 (.012 + .027)	.086 (.040 + .046)	.042 (.012 + .030)	.058 (.022 + .036)
	.6	.034 (.012 + .022)	.072 (.035 + .037)	.042 (.017 + .025)	.047 (.017 + .030)
.005	.3	.033 (.013 + .020)	.042 (.009 + .033)	.033 (.013 + .021)	.035 (.009 + .026)
	.4	.029* (.014 + .015)	.033 (.009 + .024)	.034 (.018 + .016)	.030 (.010 + .020)
	.5	.030 (.018 + .012)	.030 (.010 + .020)	.039 (.026 + .013)	.031 (.015 + .016)
	.6	.037 (.027 + .010)	.034 (.017 + .017)	.047 (.037 + .011)	.038 (.025 + .013)
.01	.3	.042 (.027 + .014)	.032 (.009 + .023)	.033* (.017 + .016)	.030 (.011 + .019)
	.4	.041 (.030 + .011)	.028* (.010 + .017)	.034 (.022 + .012)	.028* (.014 + .014)
	.5	.045 (.036 + .009)	.029 (.015 + .014)	.039 (.029 + .009)	.032 (.021 + .011)
	.6	.053 (.046 + .007)	.036 (.024 + .012)	.047 (.039 + .008)	.041 (.031 + .009)
.015	.3	.056 (.044 + .012)	.030 (.011 + .019)	.034 (.020 + .014)	.029 (.013 + .016)
	.4	.057 (.048 + .009)	.028 (.014 + .014)	.035 (.025 + .011)	.029 (.017 + .012)
	.5	.063 (.056 + .007)	.031 (.019 + .011)	.041 (.032 + .009)	.034 (.024 + .010)
	.6	.073 (.067 + .006)	.038 (.029 + .010)	.049 (.041 + .008)	.042 (.033 + .008)
.02	.3	.073 (.062 + .011)	.031 (.014 + .017)	.038 (.024 + .013)	.030 (.015 + .015)
	.4	.076 (.068 + .008)	.029 (.017 + .013)	.039 (.029 + .010)	.030 (.019 + .011)
	.5	.084 (.078 + .006)	.033 (.023 + .010)	.045 (.037 + .008)	.035 (.026 + .009)
	.6	.097 (.091 + .005)	.041 (.032 + .009)	.054 (.046 + .007)	.044 (.036 + .008)

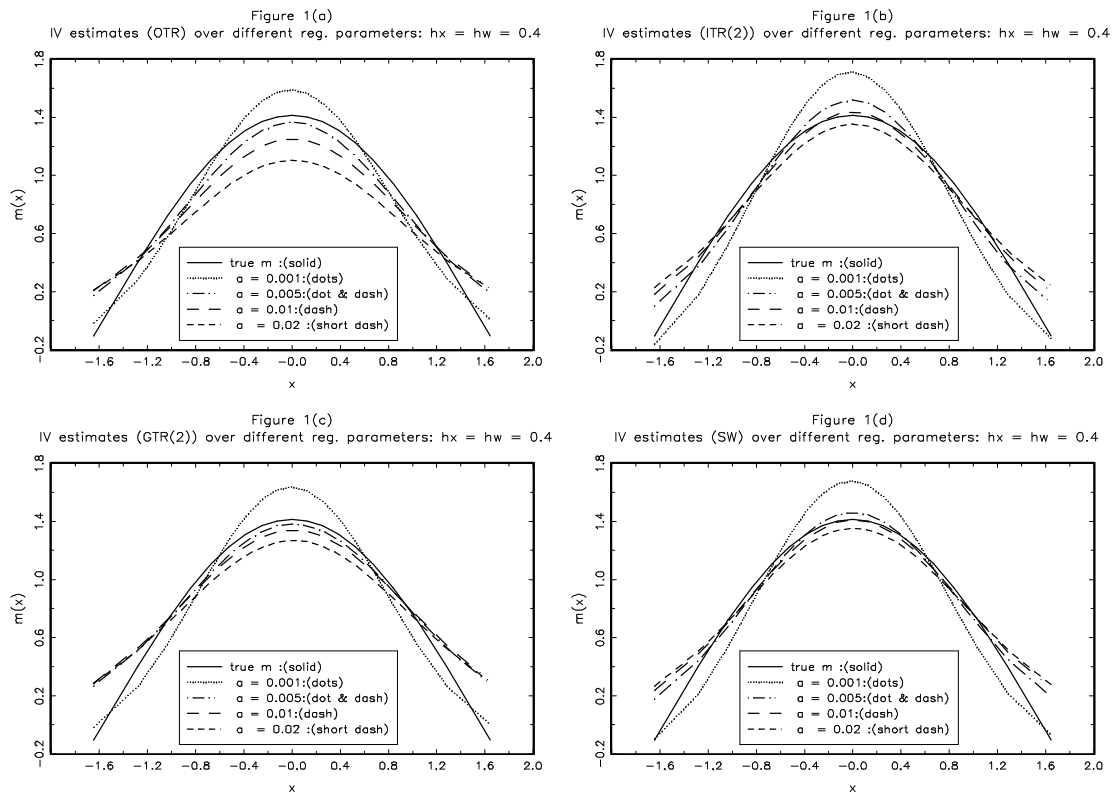


Figure 1: Averaged IV estimates over different regularization parameters: with  $g = 0.4$

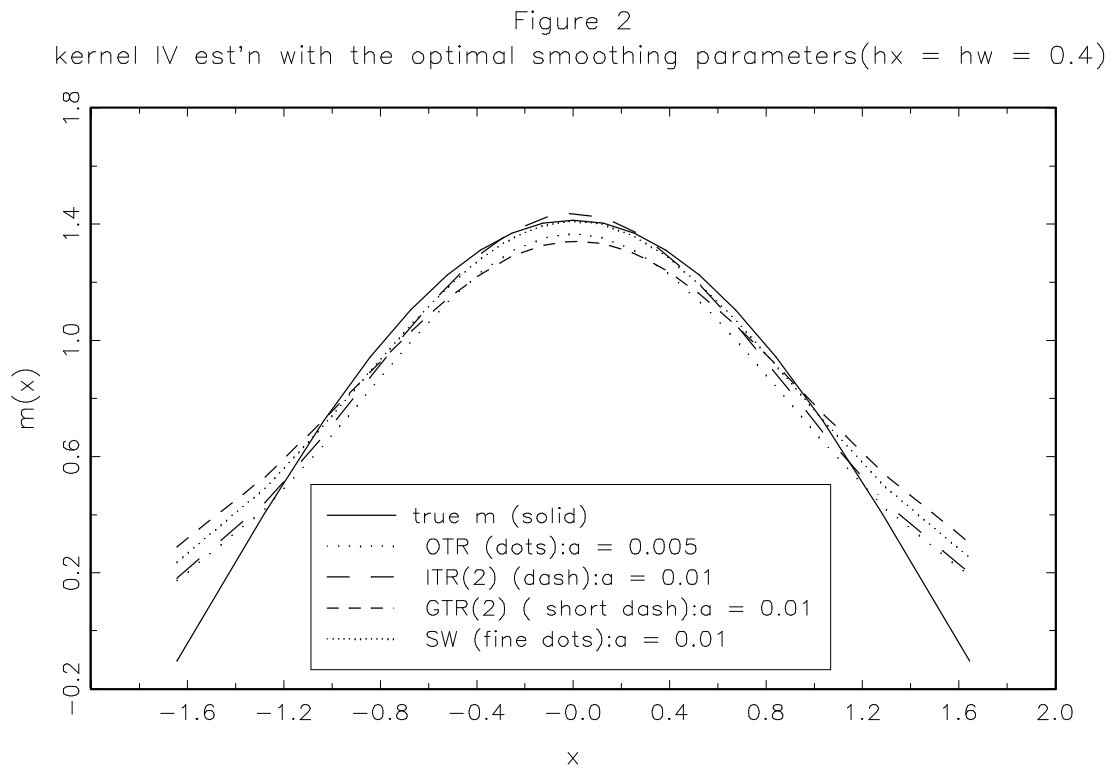


Figure 2: Averaged IV estimates for the optimal choice of regularization parameter (with  $g = 0.4$ )

# ***Review of Fiscal Studies***

A Biannual Journal Published by the Korea Institute of Public Finance

---

Vol. 10, No. 2

August 2004

---

## An Empirical Study on Alternative Measures of Marginal Tax Rates

Hyun-Sub, Roh · Gab-Soo, Seo · Jong-Gil, Seo

The marginal tax rate plays an important role in many topics in financial decision making, including debt policy, cost of capital calculation, and corporate compensation decision, and relative pricing between taxable and nontaxable securities. Yet little research focuses on how to measure the marginal tax rate.

This paper focuses on what is the best way to measure the corporate marginal tax rate. This paper examines whether the simulated marginal tax rate is a reasonable proxy for the marginal tax rate using Korean corporate tax code and financial statement database(KIS-FAS), and what can be alternatives of marginal tax rate when simulated marginal tax rate is unavailable.

The list of alternative measures includes three measures of the marginal

tax rate(the perfect foresight marginal tax rate, the simulated marginal tax rate, a marginal tax rate variable developed by Manzon), five dummy variables based on the sign of taxable income and/or net operating loss carryforward status(the statutory marginal tax rate, taxable income dummy, non NOL dummy, a trichotomous variables, and an uniform tax rate), and two measures of the effective tax rate(an average tax rate and an effective tax rate variable developed by Zimmerman).

The results indicated that the simulated tax rate is the best available proxy for the 'true' marginal tax rate. The simulated marginal tax rate predicts the perfect foresight marginal tax rate better than 9 other alternative proxies.

## The Impact of Financial Leverage on Firm Investment: Listed Manufacturing firms' Data for System-GMM Panel Analysis

Cho, Sam-Yong, Shin, Sun-Woo, Lee, Whon-hyern

This paper examines the impact of financial leverage on firms' investment decisions using 389 listed firms' unbalanced panel data from the 1981-2002. To this end, we have designed a dynamic investment model and used the Dynamic System GMM to quantify the results.

It shows that leverage is negatively related to firms' investment for the whole period we studied. Notably the lower the growth opportunity for a corporation, the larger was the effect. (Our regard a company as "low growth opportunity" if it meets any of the three criteria: Tobin's  $Q < 1$ ; sales growth rate  $< 25\%$ ; and total fixed asset growth rate  $< 25\%$ ). This point coincides with the idea that leverage has negative effects on agency cost as suggested by Jensen (1986) and Stulz (1990). For the whole period, the high indebtedness discouraged them from seeking aggressive growth. This differs from Myers and Majluf (1984), who asserted that the decreasing effects on agency cost were stronger in the lower growth opportunity corporations.

## Mobile Internet Pricing

Kim, Jeong-Yoo

This paper examines the market performances under packet pricing whereby users are charged based on the amount of information received. I show that the introduction of packet pricing raises the market price contrary to the government's expectation but that it increases the overall social welfare unambiguously if the user base is so large that one user is almost negligible. Also, I derive some implications on the price of multi-media transmission which usually requires a higher speed of transmission.

## Identification And Estimation Of Nonparametric Structural Models By Instrumental Variables Method

Kim, Woo-cheol

This paper concerns a new statistical approach to instrumental variables (IV) method for nonparametric structural models with additive errors. A general identifying condition of the model is proposed, based on richness of the space generated by marginal discretizations of joint density functions. For consistent estimation, we develop statistical regularization theory to solve a random Fredholm integral equation of the First kind. A minimal set of conditions are given for consistency of a general regularization method. Using an abstract smoothness condition, we derive some optimal bounds, given the accuracies of preliminary estimates, and show the convergence rates of various regularization methods, including (the ordinary/iterated/generalized) Tikhonov and Showalter's methods. An application of the general regularization theory is discussed with a focus on a kernel smoothing method. We show an exact closed form, as well as the optimal convergence rate, of the kernel IV estimates of various regularization methods.

The Finite sample properties of the estimates are investigated via a small-scale Monte Carlo experiment.

## 원고작성 요령

1. 원고는 한글과 한자를 섞어서 작성한다. 한자는 원칙적으로 학술용어, 전문용어, 고유명사 및 문장의 중심어구를 표기할 때 또는 한글로 표기하였을 때 뜻이 분명하지 않거나 문맥을 빨리 이해할 수 없는 경우에 한하여 사용한다.
2. 외래어는 ‘외래어 표기법’에 따라 적는 것을 원칙으로 한다. 단 인명, 지명 등이 한자로 표시된 경우, 인용논문의 저자 이름을 표기할 경우 또는 적절히 국문으로 바꿀 수 없는 특수 학술용어 등은 외래어를 그대로 적을 수 있다.
3. 표와 그림의 내용은 본문이나 참고문헌 등을 참조하지 않고, 표나 그림만을 보고 이해할 수 있도록 작성하여야 한다.
4. 각주의 기입사항은 저자명, 서명, 발행지명, 발행연도, 페이지수 등의 순서대로 적는 것을 원칙으로 하나, 인용논문을 표기할 때 간단한 경우는 각주로 처리하지 않고 본문 중에서 ‘저자명(출판연도)’의 형태로 쓸 수 있다.
5. 본문과 각주에서 언급된 모든 문헌의 자세한 정보는 논문 말미의 참고문헌에서 밝힌다. 본문과 각주에서 언급되지 않은 문헌은 참고문헌에 포함하지 않는다. 참고문헌은 국내문헌 또는 한자로 표기한 외국문헌을 각각 저자명에 따라 가나다순으로 먼저 기재하고, 이어서 서양문헌을 저자의 성(last name) 또는 기관명에 따라 ABC순으로 기재한다.
6. 기타 세부 편집사항은 『재정연구』 편집위원회의 규정에 따른다.

## 『재정연구』 원고모집

1. 『재정연구』는 재정을 비롯하여 노동, 환경, 농업 등 **광범위한 분야**의 경제학 관련 학술논문을 모집하고 있습니다(『재정연구』에 제출하는 논문은 다른 국내외 학술지에 게재되었거나 심사중이지 않은 것이어야 합니다).
2. 『재정연구』는 ‘**연구논문**’과 ‘**정책논문**’ section으로 나뉘어지며, 매호 3~4편의 연구논문과 1~2편의 정책논문을 게재할 예정입니다(논문을 투고하실 때 연구논문, 또는 정책논문 여부를 알려주시기 바랍니다).
3. 제출되는 논문에 대해서는 전문 학술지가 요구하는 **referee** 과정을 거치게 되며, 채택된 원고에 대해서는 논문 1편당 **300만원**의 원고료를 지급합니다.
4. 저희 한국조세연구원에서는 『**東湖논문상**』을 제정하였습니다. 이 상은 『재정연구』에 실린 1년 동안의 논문 중 최우수논문 1편, 우수논문 1편에 수여되며 부상으로 각각 **200만원**과 **100만원**이 추가로 지급됩니다(최우수논문이 없을 경우 우수논문 2편을 선정합니다).
5. 『재정연구』에 투고하는 논문은 제목(국문, 영문), 저자명(국문, 영문, 한문), 본문, 국문초록(한글 400자 이내), 영문초록(영문 200단어 이내), 참고문헌으로 구성되어야 하며, ‘**한글**’ 또는 MS Word 파일(이외의 파일은 원고출력본 3부)로 제출하시기 바랍니다.
6. 『재정연구』는 연속간행물로서 원고는 특정 마감일 없이 **항시 모집**하고 있습니다.
7. 논문은 e-mail 또는 일반우편으로 받으며 주소는 아래와 같습니다.  
e-mail : junkim@kipf.re.kr  
팩 스 : (02) 2186-2066  
일반우편 : 서울특별시 송파구 가락동 79-6 한국조세연구원 ☎ 138-774  
김정훈(『재정연구』 편집위원장)
8. 기타 투고 및 편집에 관한 자세한 사항은 김정훈 박사(2186-2300, junkim@kipf.re.kr)에게 문의하여 주시기 바랍니다.